ANALYTISCHE MECHANIK

von

Ottmar Loos

Textsatz: Tom Winandy

November 2021

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

UNIVERSITÄT INNSBRUCK

ÖSTERREICH

Einleitung

Die nachstehende Ausarbeitung entstand aus einer Reihe von Vorträgen in einem mit Herrn Prof. J. Rothleitner gemeinsam veranstalteten Seminar im WS 1981/82. Mein Hauptanliegen war, die wesentlichen in der klassischen Mechanik auftretenden Begriffe mathematisch sauber darzustellen, und auch den Zugang der französischen Schule zur Mechanik, der im deutschen Sprachraum weniger bekannt zu sein scheint, vorzutragen. Vollständigkeit oder historische Genauigkeit wird nirgends beansprucht. Um die mathematische Entwicklung der Theorie von physikalischen und sonstigen Überlegungen zu trennen, habe ich letztere in Sternchen * ... * eingeschlossen. Die Sprache der modernen Differentialgeometrie, wie sie heute in vielen Lehrbüchern zu finden ist, wird als bekannt angenommen.

Anmerkung zur Notation

Beim Neusetzen des Textes wurden folgende Anpassungen der Notation gemacht. Das Differential einer Funktion f wird hier mit Df bezeichnet, während Herr Loos im Original Tf verwendet. Weiter wird der Tangentialraum an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt p mit T_pM bezeichnet (ohne Klammern), während im Original $T_p(M)$ steht. Dieser Unterschied setzt sich entsprechend auf die jeweiligen Bündel fort. Das Tangentialbündel heißt hier folglich TM, im Original hingegen $T(M)$. Die von einer Karte $(x^1, \dots, x^n)$ induzierten Basisvektoren von T_pM werden hier $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$ geschrieben im Gegensatz zu $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ im Original.

Inhalt

1 Galilei-Mannigfaltigkeiten

1.1 Mannigfaltigkeiten mit Zeitstruktur

* Betrachte ein "mechanisches System", das man sich zunächst ganz naiv als ein System von Massenpunkten vorstelle, die sich in gewisser Weise, nicht unbedingt unabhängig voneinander, bewegen können. Sei M die Menge der möglichen raum-zeitlichen Konfigurationen oder Ereignisse dieses Systems; einen Punkt von M kann man sich als eine Momentaufnahme des Systems mit Angabe einer Uhrzeit vorstellen. Unsere erste Grundannahme ist: M ist in natürlicher Weise eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit. Unsere zweite, der klassischen Mechanik eigentümliche, Grundannahme ist: Zeitdifferenzen haben eine absolute Bedeutung. Das ist folgendermaßen zu verstehen: Zu jedem Punkt von M gibt es eine Umgebung U und eine Funktion $t\colon U \to \mathbb{R}$, sodass für alle $p_1, p_2 \in U$ die Differenz $t(p_2) - t(p_1)$ ("der zeitliche Abstand der Ereignisse p_1 und p_2") eine wohldefinierte Größe ist. Es erscheint sinnvoll, die Existenz von t nicht global auf M, sondern nur lokal zu fordern, da sich unsere physikalischen Messmethoden immer nur auf begrenzte Raum-Zeit-Bereiche *(. . .)*

beziehen können. Ist $\tilde{t}$ eine weitere Zeitfunktion auf $\tilde{U}$, so folgt aus

$$\tilde{t}(p_2) - \tilde{t}(p_1) = t(p_2) - t(p_1)$$

für alle $p_1, p_2 \in U \cap \tilde{U}$, dass $t - \tilde{t}$ auf $U \cap \tilde{U}$ konstant ist, also $\mathrm{d}\tilde{t}|U \cap \tilde{U} = \mathrm{d}t|U \cap \tilde{U}$. Das zeigt: es gibt eine wohldefinierte geschlossene 1-Form θ auf M mit $\theta|U = \mathrm{d}t$. Schließlich ist es vernünftig, zu verlangen, dass die Zeit "gleichmäßig verfließt", d. h., dass die lokalen Zeitfunktionen keine stationären Punkte haben. So gelangt man zu der folgenden *

Definition 1. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Eine **Zeitstruktur** auf M ist eine geschlossene nirgends verschwindende 1-Form θ.

Im Folgenden bezeichnet M stets eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur θ. Statt θ schreiben wir auch $\mathrm{d}t$, ohne damit behaupten zu wollen, dass θ global das Differential einer Funktion t sei. Sei n durch

$$\dim M = n + 1$$

definiert (n entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems). Eine Karte $(U; x^0, \ldots, x^n)$ von M heißt an die Zeitstruktur **angepasst**, wenn $\theta|U = \mathrm{d}x^0$. Die Existenz angepasster Karten um jeden Punkt von M folgt leicht aus dem Poincaréschen Lemma und der Tatsache, dass θ nirgends verschwindet. Die angepassten

Karten bilden also einen Atlas von M. Für die Übergangsfunktionen zwischen zwei angepassten Karten $(U; x^0, \ldots, x^n)$ und $(\tilde{U}; \tilde{x}^0, \ldots, \tilde{x}^n)$ gilt, falls $U \cap \tilde{U}$ zusammenhängend ist:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= x^0 + \mathrm{const}, \\ \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^0, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden stets angepasste Karten verwendet. Statt x^0 schreiben wir meist wieder t. Ferner verwenden wir die Konvention: lateinische Indizes (i, j, k u.s.w.) laufen von 1 bis n, über doppelt auftretende gleiche Indizes ist zu summieren.

1.2 Raumartige und zeitartige Vektoren

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur θ. Ein Tangentenvektor $v \in T_pM$ heißt **raumartig**, falls $\theta_p(v) = 0$, und **zeitartig**, falls $\theta_p(v) \neq 0$. Sei $V_p = \operatorname{Ker} \theta_p \subset T_pM$ die Menge aller raumartigen Vektoren im Punkt p und $A_p = \{v \in T_pM \colon \theta_p(v) = 1\}$ die Menge aller "zeitnormierten" Vektoren. Eine Basis für V_p ist $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$. Dagegen ist A_p kein Untervektorraum, sondern ein affiner Unterraum von T_pM. Offenbar ist $V = \bigcup_{p \in M} V_p$ ein Untervektorbündel von TM der Kodimension 1, das wegen $\mathrm{d}\theta = 0$ integrabel ist. Die Blätter der durch V definierten Blätterung von M heißen die **instantanen Räume**.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Kurve $\gamma\colon I \to M$ heißt **nach der Zeit parametrisiert**, wenn $\langle \theta, \dot{\gamma} \rangle = 1$.

* Ein raumartiger Vektor ist das, was in der älteren Literatur eine "virtuelle Verrückung" genannt wird, nämlich eine "unendlich kleine Verrückung des Systems (d. h. ein Tangentenvektor v) bei festgehaltener Zeit" (d. h. $\theta_p(v) = 0$). Eine nach der Zeit parametrisierte Kurve ist als eine mögliche Bewegung des mechanischen Systems zu interpretieren. In der Tat wird man als Bewegung eine "zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen" bezeichnen; d. h. eine Kurve $\gamma(\tau)$ mit der Eigenschaft, dass lokal $t\left(\gamma(\tau_2)\right) - t\left(\gamma(\tau_1)\right) = \tau_2 - \tau_1$ ist (Änderung des Parameters τ = Änderung der Zeitfunktion t), und diese Bedingung ist äquivalent mit $\langle \theta, \dot{\gamma} \rangle = 1$. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $\theta = \mathrm{d}t$ exakt ist. Dann sind die instantanen Räume gerade die Hyperflächen $t = \mathrm{const}$ (bzw. die Zusammenhangskomponenten davon), was die Bezeichnung erklärt.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, dass es in der klassischen Mechanik keinen "absoluten Raum" in dem Sinne gibt, dass man jedem $p \in M$ einen Punkt $r(p)$ einer (n-dimensionalen) Mannigfaltigkeit R zuordnen könnte, so wie man jedem $p \in M$ (wenigstens lokal und bis auf eine additive Konstante) die Zeit $t(p)$ zuordnen kann. Insbesondere ist es sinnlos, von einer *(. . .)*

Größe, etwa einer Funktion, zu sagen, sie sei "zeitunabhängig". (Dagegen ist sinnvoll zu sagen, eine Funktion hänge nur von der Zeit ab. Dies bedeutet einfach, dass sie auf den instantanen Räumen konstant ist, oder, damit gleichbedeutend, dass $df \wedge \theta = 0$). Aus diesem Grunde sind Darstellungen der Mechanik, in denen "zeitunabhängige Systeme" studiert werden (etwa Abraham-Marsden), mit einiger Vorsicht zu betrachten. *

1.3 Galilei Metriken

* Sei $v \in V_p$ eine "virtuelle Verrückung" der Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur (M, θ). Anschaulich ist zur "Durchführung" dieser Verrückung eine gewisse positive Arbeit erforderlich, die von den im System vorhandenen Massen und ihrer geometrischen Konfiguration und natürlich von v selbst abhängt. Die Abhängigkeit von v ist erfahrungsgemäß homogen quadratisch; die fragliche Arbeit lässt sich also in der Form $\frac{1}{2} g_p(v, v)$ darstellen, wobei g_p ein positiv definites Skalarprodukt auf V_p ist. Das führt zu der *

Definition 2. Sei (M, θ) eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur. Eine **Galilei-Metrik** auf (M, θ) ist eine positiv definite Fasermetrik g auf dem Bündel V *(...)*

(also ein positiv definites Skalarprodukt g_p auf jedem V_p, das differenzierbar von p abhängt). Das Tripel (M, θ, g) heißt eine **Galilei-Mannigfaltigkeit**.

Wir definieren die **Komponenten** g_{ij} von g (bezüglich einer angepassten Karte) durch

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Wie üblich induziert das Skalarprodukt g auf V die "musikalischen" Isomorphismen $\flat\colon V \to V^*$ und $\sharp\colon V^* \to V$ (Senken und Heben von Indizes mit g_{ij} bzw. der inversen Matrix g^{ij}), und ein Skalarprodukt g^* auf V^*. Man beachte, dass es nicht möglich ist, g auf natürliche Weise zu einer Bilinearform auf TM fortzusetzen. Rechnerisch drückt sich dies dadurch aus, dass der Ausdruck $g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ nicht kartenunabhängig ist. Dagegen kann man ein positiv semidefinites Skalarprodukt $g^\sharp$ auf T^*M folgendermaßen definieren: für jedes $p \in M$ ist V_p^* kanonisch isomorph zu $T_p^*M/\mathbb{R}.\theta_p$. Man bekommt $g^\sharp$ durch Zusammensetzen der kanonischen Abbildung $T_p^*M \to T_p^*M/\mathbb{R}.\theta_p$ mit g^*. In einer lokalen Karte ist

$$g^\sharp(\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^0) = g^\sharp(\mathrm{d}x^0, \mathrm{d}x^i) = 0, \quad g^\sharp(\mathrm{d}x^i, \mathrm{d}x^j) = g^{ij}.$$

(Umgekehrt kommt ein positiv semidefinites Skalarprodukt h auf T^*M vom Rang n mit $h(\theta, \theta) = 0$ von einer eindeutig bestimmten Galilei-Metrik g her).

Eine Galilei-Mannigfaltigkeit heißt **flach**, wenn die instantanen Räume lokal-Euklidische Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind. Eine äquivalente Bedingung ist: um jeden Punkt von M gibt es eine angepasste Karte, sodass die Komponenten der Metrik durch

$$g_{ik} = \delta_{ik}$$

gegeben sind. Die Übergangsfunktionen zwischen zwei Karten dieser Art haben die Form

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t + c, \\ \tilde{x}^i &= a^i_k(t)\, x^k + b^i(t), \end{aligned}$$

wobei die $(a^i_k(t))$ eine orthogonale Matrix bilden.

2 Mechanische Systeme

2.1 Der Zustandsraum

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur θ. Der **Zustandsraum** von (M, θ) ist die Menge $A = \bigcup_{p \in M} A_p \subset TM$ aller zeitnormierten Vektoren. Mit der kanonischen Projektion $\pi\colon A \to M$ ist A ein affines Bündel über M der Dimension $2n+1$, denn jede Faser $A_p = \pi^{-1}(p)$ ist die affine Hyperebene mit der Gleichung $\theta_p = 1$ in T_pM. Eine nach der Zeit parametrisierte Kurve $\gamma\colon I \to M$ induziert eine Kurve $\dot\gamma\colon I \to A$ mit $\gamma = \pi \circ \dot\gamma$.

* Sei M der Raum der Ereignisse eines naiven mechanischen Systems. Man weiß aus der Erfahrung, dass eine tatsächliche Bewegung γ des Systems durch die Angabe der Geschwindigkeit in einem Raumzeitpunkt festgelegt ist, also durch die Angabe eines einzigen Punktes $a = \dot\gamma(\tau_0)$ der Kurve $\dot\gamma$ (beachte, dass in $\dot\gamma(\tau_0)$ wegen $\pi \circ \dot\gamma$ auch der Raumzeitpunkt $\gamma(\tau_0)$ enthalten ist!). Der Punkt $a \in A$ bestimmt also den Zustand des Systems vollständig, daher die Bezeichnung "Zustandsraum". (Bei Souriau heißt A der Evolutionsraum). *

Die surjektive Submersion $\pi\colon A \to M$ induziert eine Injektion π^* der Differentialformen auf M in die auf A. Die so erhaltenen Differentialformen auf A heißen **basisch**. Wir werden oft in der Bezeichnung *(...)*

zwischen einer Differentialform α auf M und der Form $\pi^*\alpha$ auf A nicht unterscheiden, also die Differentialformen auf M mit den basischen Differentialformen auf A identifizieren. Insbesondere ist $\pi^*\theta$ eine nirgends verschwindende geschlossene 1-Form auf A, also eine Zeitstruktur auf A. Die instantanen Räume von $\pi^*\theta$ heißen die **instantanen Phasenräume**. Sie sind (vermöge π) affine Bündel der Dimension $2n$ über den instantanen Räumen von M.

Sei $(U; x^0, \dots, x^n)$ eine angepasste Karte von M. Ein Element $a \in \pi^{-1}(U) \subset A$ ist dann von der Form

$$a = \left.\frac{\partial}{\partial x^0}\right|_p + u^i(a) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \qquad (p = \pi(a)),$$

mit $u^i(a) \in \mathbb{R}$. Hierdurch sind Funktionen $u^i \colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ definiert und $(\pi^{-1}(U); x^0, \dots, x^n, u^1, \dots, u^n)$ ist eine Karte von A. Hierbei sind die $x^0, \dots, x^n$ als Funktionen auf $\pi^{-1}(U)$ aufzufassen. Wir sollten also eigentlich $x^0 \circ \pi, \dots, x^n \circ \pi$ schreiben, was wir aber im Hinblick auf die oben gemachte Bemerkung über basische Differentialformen unterlassen, um die Bezeichnungen zu vereinfachen. Für die Übergangsfunktionen zwischen zwei solchen Karten gilt

$$\tilde{u}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\, u^k + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0}\,. \tag{2.1}$$

Sie sind also inhomogen linear in den u^k. Das entspricht der Tatsache, dass A ein affines und kein Vektorbündel ist.

* In Physikbüchern findet man meist die Bezeichnung q^i statt x^i (verallgemeinerte Koordinaten) und $\dot{q}^i$ statt u^i (verallgemeinerte Geschwindigkeiten). Die letztere Bezeichnung gibt leicht zu Verwechslungen mit der Zeitableitung Anlass und wir verwenden sie daher nicht. A wird auch als der "$(t, q, \dot{q})$-Raum" bezeichnet. *

Die Projektion $\pi\colon A \to M$ induziert $\mathrm{D}\pi\colon TA \to TM$ und definiert daher ein Unterbündel $K = \operatorname{Ker} \mathrm{D}\pi$ von TA, genannt das Bündel der **vertikalen Vektoren**. Für jedes $a \in A$ ist also

$$K_a = \{v \in T_aA\colon \mathrm{D}\pi(v) = 0\},$$

und $T_aA/K_a \cong T_{\pi(a)}M$, denn π ist eine Submersion. Ferner ist K_a der Tangentialraum im Punkt a an die Faser $A_p = \pi^{-1}(p)$ $(p = \pi(a))$. Da andererseits A_p die affine Hyperebene mit der Gleichung $\theta_p = 1$ in T_pM ist, können wir diesen Tangentialraum mit $\operatorname{Ker} \theta_p = V_p$ identifizieren. Auf diese Weise bekommt man einen Isomorphismus

$$K_a \cong V_{\pi(a)}$$

für alle $a \in A$. Eine Basis von K_a ist (in einer Karte der oben angegebenen Art) durch $\frac{\partial}{\partial u^1}\big|_a, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}\big|_a$ gegeben, und eine Basis von V_p ist $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p$. Der Isomorphismus $K_a \cong V_p$ drückt sich in diesen Basen einfach durch *(...)*

$$\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_a \mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\pi(a)}$$

aus. Die Fasermetrik g von V induziert eine Fasermetrik von K, die wir wieder mit g bezeichnen. Es gilt also per definitionem

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = g_{ij} .$$

2.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

* Die Tatsache, dass die Bewegung eines mechanischen Systems durch die Angabe eines Anfangszustandes $a \in A$ bestimmt ist, legt es nahe, diese Bewegung als Integralkurve eines Vektorfeldes Z auf A, der "Bewegungsgleichung", zu beschreiben; denn Vektorfelder haben gerade die Eigenschaft, dass durch jeden Punkt genau eine Integralkurve geht. Das Vektorfeld Z kann allerdings nicht ganz beliebig sein, denn seine Integralkurven müssen die Form $\dot{\gamma}$ mit einer nach der Zeit parametrisierten Kurve γ in M haben. Mit anderen Worten: ist β eine Integralkurve von Z (also $\dot{\beta} = Z \circ \beta$) und $\gamma := \pi \circ \beta$ die Projektion von β nach M, dann ist γ eine nach der Zeit parametrisierte Kurve mit $\dot{\gamma} = \beta$. Nun ist $\beta = \dot{\gamma} = (\pi \circ \beta)^{\cdot} = \mathrm{D}\pi \circ \dot{\beta} = \mathrm{D}\pi \circ Z \circ \beta$, und das legt folgende Definition nahe: *

Definition 3. Eine **Differentialgleichung 2. Ordnung** ist ein Vektorfeld Z auf A mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{D}\pi \circ Z = \mathrm{Id}_A$.

Eine äquivalente Charakterisierung ist: in jeder Karte hat Z die Form

$$Z|_{\pi^{-1}(U)} = \frac{\partial}{\partial x^0} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Z^i(t,x,u) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

mit gewissen Funktionen Z^i auf $\pi^{-1}(U)$. Eine Kurve γ ist genau dann eine Lösung von Z (d. h. die Projektion einer Integralkurve von Z), wenn die $\gamma^i = x^i \circ \gamma$ den Gleichungen

$$\ddot{\gamma}^i(\tau) = Z^i(\tau, \gamma^1(\tau), \ldots, \gamma^n(\tau), \dot{\gamma}^1(\tau), \ldots, \dot{\gamma}^n(\tau))$$

genügen. Aus diesem Grunde, und mit Rücksicht auf althergebrachte Formeln schreiben wir Z auch "in Gleichungsform" als

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = u^i, \quad \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = Z^i(t,x,u),$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = Z^i\left(t, x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right).$$

Die Differenz zweier Differentialgleichungen 2. Ordnung ist ein Schnitt in K, und umgekehrt ist die Summe eines Schnittes von K und einer Differentialgleichung 2. Ordnung wieder eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Differentialgleichungen 2. Ordnung bilden also einen (unendlich-dimensionalen) affinen Raum mit den Schnitten von K als zugehörigem Vektorraum.

2.3 Mechanische Systeme

Definition 4. Ein **mechanisches System** ist ein Quadrupel (M, θ, g, Z), bestehend aus einer Galilei-Mannigfaltigkeit (M, θ, g) und einer Differentialgleichung 2. Ordnung Z, der **Bewegungsgleichung** des Systems. Die Bewegungen des Systems sind die Projektionen nach M der Integralkurven von Z.

Beispiele

(i) **Das freie Teilchen**. Sei $M = \mathbb{R}^{n+1}$ mit der natürlichen Karte $(x^0, \ldots, x^n)$, der Zeitstruktur $\theta = \mathrm{d}x^0$, und der Galilei-Metrik g mit den Komponenten

$$g_{ik} = m\,\delta_{ik} \quad (m > 0).$$

Es ist $A \cong \mathbb{R}^{2n+1}$ mit der globalen Karte $(x^0, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^n)$. Sei

$$Z_0 = \frac{\partial}{\partial t} + u^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Das System (M, θ, g, Z) heißt das freie Teilchen der Masse m mit n Freiheitsgraden.

(ii) **Der harmonische Oszillator**. Mit (M, θ, g, Z) wie in (i) und Konstanten k, ρ sei

$$Z = Z_0 - \left(\frac{2\rho}{m}u^i + \frac{k}{m}x^i\right)\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Das System (M, θ, g, Z) heißt der gedämpfte harmonische Oszillator. In Gleichungsform lautet die Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + 2\rho\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} + kx^i = 0.$$

(iii) **Das Teilchen im elektromagnetischen Feld**. Betrachte den Fall (i) mit $n = 3$. Es liege ein elektrisches Feld (E_1, E_2, E_3) und ein Magnetfeld (B_1, B_2, B_3) vor. Die Bewegungsgleichung eines Teilchens der Ladung e lautet dann in Gleichungsform

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = e\left(E_i + \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}B_k - \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}B_j\right).$$

((i, j, k) zyklische Permutation von $(1, 2, 3)$). Wir betrachten also die Differentialgleichung 2. Ordnung $Z = Z_0 + Z^i\frac{\partial}{\partial u^i}$ mit

$$Z^i = \frac{e}{m}\left(E_i + u^jB_k - u^kB_j\right).$$

2.4 Morphismen und Automorphismen

Ein **Morphismus** zwischen zwei mechanischen Systemen (M', θ', g', Z') und (M, θ, g, Z) ist eine Abbildung $f\colon M' \to M$ mit $f^*\theta = \theta'$, $f^*g = g'$, und $\mathrm{D}(\mathrm{D}f) \circ Z' = Z \circ \mathrm{D}f$. Zur letzten Bedingung beachte man: wegen $f^*\theta = \theta'$ ist $\mathrm{D}f\colon A' \to A$ und dann besagt sie, dass die Vektorfelder Z' und Z $\mathrm{D}f$-verwandt sind. Wie üblich definiert man Isomorphismen und Automorphismen. Es gilt folgender Satz, den wir hier leider nicht beweisen können:

Satz 1. *Die Automorphismengruppe eines mechanischen Systems ist in natürlicher Weise eine Lie-Transformationsgruppe von M, ihre Dimension ist $\leq \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.*

Dagegen ist die (in naheliegender Weise definierte) Automorphismengruppe einer Galilei-Mannigfaltigkeit (M, θ, g) keine Lie-Gruppe.

Beispiele. Die Automorphismengruppe des freien Teilchens mit n Freiheitsgraden ist die inhomogene Galilei-Gruppe; d. h. die Gruppe aller affinen Transformationen g des $\mathbb{R}^{n+1}$ der Form

$$x^0 \circ g = x^0 + c^0, \quad x^i \circ g = a^i_k\, x^k + b^i x^0 + c^i$$

mit (a^i_k) orthogonal. Ihre Dimension ist $1 + \frac{1}{2}n(n+1) + 2n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Im Fall des harmonischen Oszillators hat die Automorphismengruppe ebenfalls die maximale Dimension, besteht aber nicht mehr aus affinen Transformationen des $\mathbb{R}^{n+1}$. Umgekehrt kann man zeigen: Ein einfach zusammenhängendes mechanisches System, dessen Automorphismengruppe die maximale Dimension hat, ist isomorph zum harmonischen Oszillator (für geeignete Werte von m, ρ, k; das freie Teilchen ist der Spezialfall $\rho = k = 0$).

Ein Vektorfeld X auf M heißt ein **infinitesimaler Automorphismus** von (M, θ, g, Z), wenn $\mathcal{L}_X\, \theta = 0$, $\mathcal{L}_X\, g = 0$ und $[\hat{X}, Z] = 0$. Hier ist $\mathcal{L}$ die Lie-Ableitung, und $\hat{X}$ ist folgendermaßen erklärt: die Bedingung $\mathcal{L}_X\, \theta = 0$ ist äquivalent damit, dass X lokal die Form

$$X = c\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}$$

hat, mit $c \in \mathbb{R}$. Dann induziert X ein Vektorfeld $\hat{X}$ auf A, das lokal durch *(...)*

$$\hat{X} = c\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}u^k + \frac{\partial \xi^i}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial u^i}$$

gegeben ist. Falls X die globale 1-Parametergruppe $(\varphi_s)_{s\in\mathbb{R}}$ erzeugt, so ist die von $\hat{X}$ erzeugte 1-Parametergruppe gerade $(\mathrm{D}\varphi_s)_{s\in\mathbb{R}}$, und jedes φ_s ist ein Automorphismus von (M,θ,g,Z). Die infinitesimalen Automorphismen bilden eine Lie-Algebra der Dimension $< \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, und die Lie-Algebra der Automorphismengruppe von (M,θ,g,Z) besteht gerade aus allen vollständigen infinitesimalen Automorphismen.

3 Die Wirkungsform eines mechanischen Systems

3.1 Die kanonische 1-Form

Sei (M, θ) eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur. Für $a \in A_p$ und $w \in T_a A$ ist

$$\mathrm{D}\pi(w) - \big\langle \theta_p \,, \mathrm{D}\pi(w) \big\rangle a$$

ein raumartiger Vektor im Punkt p, denn

$$\begin{aligned} &\Big\langle \theta_p \,, \mathrm{D}\pi(w) - \big\langle \theta_p \,, \mathrm{D}\pi(w) \big\rangle a \Big\rangle \\ &\qquad = \big\langle \theta_p \,, \mathrm{D}\pi(w) \big\rangle - \big\langle \theta_p \,, \mathrm{D}\pi(w) \big\rangle \langle \theta_p \,, a \rangle = 0 \end{aligned}$$

wegen $\langle \theta_p \,, a \rangle = 1$. Unter dem Isomorphismus $V_p \cong K_a$ entspricht $\mathrm{D}\pi(w) - \big\langle \theta_p \,, \mathrm{D}\pi(w) \big\rangle a$ ein Vektor $\mu(w) \in K_a$. Dies definiert einen Vektorbündelhomomorphismus

$$\mu \colon TA \to K,$$

der auch die kanonische 1-Form von A heißt. In einer Karte $(\pi^{-1}(U); x^0, \ldots, x^n, u^1, \ldots, u^n)$ ist μ durch

$$\mu|_{\pi^{-1}(U)} = \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \big(\mathrm{d}x^i - u^i \, \mathrm{d}t \big)$$

gegeben, wie man sich leicht überlegt. Die 1-Formen $\mathrm{d}x^i - u^i \mathrm{d}t$ auf $\pi^{-1}(U)$ transformieren sich beim Übergang zu einer anderen Karte nach der Regel

$$\mathrm{d}\tilde{x}^i - \tilde{u}^i \, \mathrm{d}t = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \big(\mathrm{d}x^k - u^k \, \mathrm{d}t \big) \,.$$

Das folgt leicht aus (2.1). Offenbar ist μ surjektiv, und es gilt $\mu(K) = 0$ und $\mu(Z) = 0$ für jede Differentialgleichung 2. Ordnung Z.

3.2 Horizontale Vektoren

Sei Z eine Differentialgleichung 2. Ordnung, in einer Karte gegeben durch

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Z^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Definiere 1-Formen η^i auf $\pi^{-1}(U)$ durch

$$\eta^i := \mathrm{d}u^i - \frac{1}{2}\frac{\partial Z^i}{\partial u^k}\big(\mathrm{d}x^k - u^k\mathrm{d}t\big) - Z^i\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Lemma 1. *Ist $(\pi^{-1}(\tilde{U}); \tilde{x}^0, \ldots, \tilde{x}^n, \tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^n)$ eine weitere Karte und sind die $\tilde{\eta}^i$ analog definiert, so gilt auf $\pi^{-1}(U \cap \tilde{U})$ die Transformationsregel:*

$$\tilde{\eta}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\,\eta^k.$$

Der Beweis besteht aus einer einfachen Rechnung. Man verwende die aus (2.1) folgende Regel

$$\tilde{Z}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\,Z^k + \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k}\,u^j u^k + 2\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^0 \partial x^k}\,u^k + \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{(\partial x^0)^2} \tag{3.2}$$

für die Komponenten von Z. Wir definieren nun einen Vektorbündelhomomorphismus

$$\eta\colon TA \to K$$

durch die lokale Formel

$$\eta|_{\pi^{-1}(U)} = \frac{\partial}{\partial u^i} \otimes \eta^i.$$

Wegen des Lemmas und der Transformationsformel

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^k}$$

ist η wohldefiniert. Aus der Definition der η^i ist klar, dass $\eta|_K = \mathrm{Id}$ und folglich $\eta^2 = \eta$ gilt. Also ist η eine Projektion, und es gilt

$$TA = K \oplus \operatorname{Ker} \eta.$$

Die Elemente von $\operatorname{Ker} \eta$ heißen **die bezüglich Z horizontalen Vektoren**. Man überzeugt sich leicht, dass $\operatorname{Ker} \mu \cap \operatorname{Ker} \eta$ ein Geradenbündel ist, das von Z aufgespannt wird.

Bemerkung. Man kann η bzw. $\operatorname{Ker} \eta$ als einen nicht-linearen Zusammenhang auffassen. Falls die Z^i in den u^k inhomogen quadratisch sind (das ist wegen (3.2) wohldefiniert), so gibt es in der Tat einen eindeutig bestimmten torsionsfreien linearen Zusammenhang ∇ auf M, sodass

$$\eta^i = \mathrm{d}u^i + \Gamma^i_{jk}\, u^j\, \mathrm{d}x^k + \Gamma^i_{j0} \left(\mathrm{d}x^j + u^j\, \mathrm{d}t\right) + \Gamma^i_{00}\, \mathrm{d}t,$$

wobei die Γ's die Christoffelsymbole von ∇ sind. Nicht jede Zerlegung von TA in K und ein dazu komplementäres Unterbündel kommt auf die beschriebene Weise von einer Differentialgleichung 2. Ordnung her; es lassen sich dafür jedoch notwendige und hinreichende Bedingungen angeben.

3.3 Die Wirkungsform

Sei (M, θ, g, Z) ein mechanisches System. Die **Wirkungsform** ist die durch *(. . .)*

$$\Omega(v,w) := g\big(\eta(v)\,,\,\mu(w)\big) - g\big(\eta(w)\,,\,\mu(v)\big) \tag{3.3}$$

($v, w \in T_aA$, $a \in A$) definierte 2-Form auf A. (Beachte: g bezeichnet auch die Fasermetrik von K, vgl. 2.1). Das System heißt **geschlossen** (**exakt**), wenn Ω geschlossen (exakt) ist. In lokalen Koordinaten ist Ω durch die Formel

$$\Omega|_{\pi^{-1}(U)} = g_{ik}\left(\mathrm{d}u^i - \frac{1}{2}\frac{\partial Z^i}{\partial u^j}\left(\mathrm{d}x^j - u^j\,\mathrm{d}t\right) - Z^i\,\mathrm{d}t\right)\wedge\left(\mathrm{d}x^k - u^k\,\mathrm{d}t\right) \tag{3.4}$$

gegeben.

Beispiele

(i) Das freie Teilchen. Hier ist

$$\Omega_0 = m\sum \mathrm{d}u^i \wedge \left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right).$$

Das System ist exakt, denn

$$\Omega_0 = \mathrm{d}\left(\sum m u^i\,\mathrm{d}x^i - \frac{m}{2}\sum \left(u^i\right)^2\mathrm{d}t\right).$$

(ii) Der harmonische Oszillator. Hier ist

$$\begin{aligned}\Omega &= \sum\Big(m\,\mathrm{d}u^i + \rho\left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right)\\ &\qquad\qquad + \left(2\rho u^i + kx^i\right)\mathrm{d}t\Big)\wedge\left(dx^i - u^i\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \Omega_0 - 2\rho\sum u^i\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}t - k\sum x^i\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathrm{d}\Omega = -2\rho\sum \mathrm{d}u^i\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}t = -\frac{2\rho}{m}\,\mathrm{d}t\wedge\Omega;$$

also ist η genau dann geschlossen, wenn die ”Reibung“ ρ verschwindet. Jedoch besitzt Ω einen integrierenden Faktor, denn

$$\mathrm{d}\left(e^{\frac{2\rho t}{m}}\Omega\right) = 0.$$

(iii) Das Teilchen im elektromagnetischen Feld.

Die Wirkungsform ist

$$\Omega = \Omega_0 + e\left(\sum E_i \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}t + \sum_{\text{zykl.}} B_i \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \right).$$

Der rechts in Klammern stehende Ausdruck ist gerade die elektromagnetische Feldform, die auf Grund der Maxwellschen Gleichungen geschlossen ist. Also ist auch Ω geschlossen.

3.4 Eigenschaften der Wirkungsform

Satz 2. *Für die Wirkungsform Ω von (M, θ, g, Z) gilt:*

(a) *Ω verschwindet auf* $\operatorname{Ker}\mu$*; insbesondere ist $\Omega|_{A_p} = 0$ für alle $p \in M$.*

(b) *Ω bestimmt die Galilei-Metrik durch*

$$g_{ik} = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

(c) *$\Omega^n \wedge \theta$ ist nirgends Null und hängt nur von (M, θ, g) ab. Insbesondere hat Ω den Rang $2n$.*

(d) *Ω bestimmt die Bewegungsgleichung: Z ist das eindeutig bestimmte Vektorfeld auf A mit*

$$Z \lrcorner \Omega = 0, \;\; \langle \theta \, , Z \rangle = 1.$$

Beweis. (a) Klar nach Definition und wegen

$$T_a A_p = K_a \subset \operatorname{Ker}\mu_a.$$

(b) Folgt sofort aus (3.4).

(c) Durch Rechnung sieht man, dass lokal

$$\Omega^n \wedge \theta = n! \det(g_{ik}) \; \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^n \wedge \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}t.$$

(d) Da Ω den Rang $2n$ hat, ist $\operatorname{Ker}\Omega$ ein Geradenbündel.

Nach (3.3) ist $\operatorname{Ker}\eta \cap \operatorname{Ker}\mu \subset \operatorname{Ker}\Omega$, und aus Dimensionsgründen gilt Gleichheit. Da Z der eindeutig bestimmte Schnitt von $\operatorname{Ker}\mu \cap \operatorname{Ker}\eta$ mit $\langle\theta, Z\rangle = 1$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Nach diesem Satz bestimmt also Ω das mechanische System eindeutig. Es ist daher auch nicht überraschend, dass sich Morphismen durch Ω charakterisieren lassen:

Satz 3. *Seien (M', θ', g', Z') und (M, θ, g, Z) mechanische Systeme mit Wirkungsformen Ω' und Ω. Eine Abbildung $f\colon M' \to M$ ist genau dann ein Morphismus der mechanischen Systeme, wenn $f^*\theta = \theta'$ und $(\mathrm{D}f)^*\Omega = \Omega'$.*

Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten.

Nach Satz 2 ist es naheliegend zu fragen, welche 2-Formen auf A als Wirkungsformen vorkommen.

3.5 Charakterisierung der Wirkungsformen

Wir benötigen zuerst ein mathematisches Hilfsmittel. Die kanonische 1-Form

$$\mu\colon TA \to K$$

induziert eine Derivation D_μ der Differentialformen auf A durch die Formel

$$(\mathrm{D}_\mu\,\omega)\,(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{i=1}^{k} \omega\,(v_1, \ldots, \mu(v_i), \ldots, v_k)\,.$$

Der Operator D_μ ist linear, ändert den Grad einer Form nicht und genügt den Regeln *(...)*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}_\mu f = 0, \quad (f \text{ Funktion auf A}),\\
&\mathrm{D}_\mu(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{D}_\mu \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathrm{D}_\mu \beta)\,,\\
&\mathrm{D}_\mu\left(\mathrm{d}x^i\right) = \mathrm{D}_\mu\,(\mathrm{d}t) = 0,\\
&\mathrm{D}_\mu\left(\mathrm{d}u^i\right) = \mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\partial := \mathrm{D}_\mu\,\mathrm{d} - \mathrm{d}\,\mathrm{D}_\mu,$$

wobei d die äußere Ableitung ist. Dann ist ∂ ein linearer Operator, der den Grad einer Form um Eins erhöht, und den folgenden Regeln genügt:

$$\begin{aligned}
&\partial f = \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right) \quad (f \text{ Funktion}),\\
&\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \partial\beta \quad (\alpha:\ k\text{-Form}),\\
&\partial\left(\mathrm{d}x^i\right) = \partial\,(\mathrm{d}t) = 0,\\
&\partial\left(\mathrm{d}u^i\right) = \mathrm{d}u^i \wedge \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Regeln, die leicht aus der Definition folgen, lässt sich $\partial\omega$ aus dem Kartenausdruck von ω effektiv berechnen. Weiter gilt

$$\partial\,\mathrm{d} = -\mathrm{d}\,\partial$$

wegen $\mathrm{d}^2 = 0$. Dagegen ist $\partial^2 \neq 0$, vielmehr gilt

$$\partial^2\omega = \theta \wedge \partial\omega.$$

Zum Beweis genügt es festzustellen, dass ∂^2 und $\omega \to \theta \wedge \partial\omega$ Derivationen sind, die auf den 0- und 1-Formen und daher überall übereinstimmen. Ist (M', θ') eine weitere Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur und $f\colon M' \to M$ eine Abbildung mit

$f^*\theta = \theta'$, so ist $\mathrm{D}f(A') \subset A$, und es gilt

$$(\mathrm{D}f)^*(\partial\omega) = \partial\left((\mathrm{D}f)^*\omega\right).$$

Satz 4. *Sei (M, θ) eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur. Eine 2-Form Ω auf A ist genau dann die Wirkungsform eines mechanischen Systems, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:*

(i) *Ω verschwindet auf $\operatorname{Ker}\mu$; d. h. $\Omega(v, w) = 0$ für alle v, w mit $\mu(v) = \mu(w) = 0$.*

(ii) *Ω induziert eine Galilei-Metrik g auf M; d. h. für alle Karten ist die Matrix*

$$g_{ik} = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

symmetrisch, positiv definit, und von den u^j unabhängig.

(iii) $\partial\Omega = 0$.

Beweis. Die Notwendigkeit von (i) und (ii) folgen aus Satz 2, und $\partial\Omega = 0$ folgt durch direkte Rechnung mit den Regeln für ∂ aus (3.4). Umgekehrt seien (i), (ii) und (iii) erfüllt. Die $2n$ 1-Formen $\frac{\partial}{\partial u^i} \lrcorner \Omega$, $\frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \Omega$ sind linear unabhängig; denn aus $a^i \frac{\partial}{\partial u^i} \lrcorner \Omega + b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \Omega = 0$ folgt wegen (i) und (ii)

$$0 = \left(a^i \frac{\partial}{\partial u^i} \lrcorner \Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) + b^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$

(...)

$$= a^i\,\Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\,,\frac{\partial}{\partial u^k}\right) + b^i\,\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\,,\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$$
$$= 0 - b^i g_{ik},$$

also $b^i = 0$, und damit auch

$$0 = \left(a^i\,\frac{\partial}{\partial u^i}\lrcorner\,\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = a^i\,\Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\,,\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = a^i g_{ik},$$

also ist $a^i = 0$. Daher hat Ω den Rang $2n$. Sei $a \in A$ und $0 \neq v \in \operatorname{Ker}\Omega_a$. Dann ist $v \in \operatorname{Ker}\mu_a$; denn $\operatorname{Ker}\mu_a \subset (\operatorname{Ker}\mu_a)^\perp$ (orthogonales Komplement bezüglich Ω_a) nach (i), andrerseits ist $\dim\operatorname{Ker}\mu_a = n+1$, und daher $\dim(\operatorname{Ker}\mu_a)^\perp \leq (2n+1)-(n+1)+1 = n+1$, folglich $\operatorname{Ker}\mu_a = (\operatorname{Ker}\mu_a)^\perp \supset (T_aA)^\perp = \operatorname{Ker}\Omega_a$. Es ist weiter $v \notin K_a$; denn sonst wäre v eine Linearkombination der $\frac{\partial}{\partial u^i}\big|_a$, was wegen (ii) unmöglich ist. Da $\operatorname{Ker}\mu_a$ von K_a und $\frac{\partial}{\partial t}\big|_a + u^i(a)\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_a$ aufgespannt wird, folgt: es gibt ein eindeutig bestimmtes Element $Z(a)$ der Form

$$Z(a) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_a + u^i(a)\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_a + Z^i(a)\frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_a$$

in $\operatorname{Ker}\Omega_a$. Dies definiert eine Differentialgleichung 2. Ordnung Z auf A, charakterisiert durch $Z\lrcorner\,\Omega = 0$, $\langle\theta\,,Z\rangle = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass Ω die Wirkungsform des mechanischen Systems (M,θ,g,Z) ist. Betrachte in einer lokalen Karte die Basis Z, $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial u^i}$ mit den dualen 1-Formen $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}u^i - Z^i\,\mathrm{d}t$. Wegen (i) und (ii) hat *(...)*

dann Ω die Form

$$\begin{aligned}\Omega = {} & \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\left(\mathrm{d}u^i - Z^i\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - u^k\,\mathrm{d}t\right) \\ & + \frac{1}{2}\,\Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\left(\mathrm{d}u^i - Z^i\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - Z^k\,\mathrm{d}t\right) \\ & + \frac{1}{2}\,\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - u^k\,\mathrm{d}t\right) \\ = {} & g_{ik}\left(\mathrm{d}u^i - Z^i\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - u^k\,\mathrm{d}t\right) \\ & \qquad + \frac{1}{2}\,a_{ik}\left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - u^k\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

mit schiefsymmetrischen $a_{ik} = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$. Nun folgt aus $\partial\Omega = 0$ durch direkte Rechnung, dass $a_{ik} = \frac{1}{2}\left(g_{ij}\frac{\partial Z^j}{\partial u^k} - g_{kj}\frac{\partial Z^j}{\partial u^i}\right)$ und damit wegen (3.4) die Behauptung. □

Auf Grund dieses Satzes können wir ein mechanisches System auch beschreiben als ein Tripel (M, θ, Ω), wobei Ω die Eigenschaften (i), (ii), (iii) hat. Diese Beschreibung bringt, wie sich zeigen wird, eine Reihe technischer Vorteile, die vor allem darauf beruhen, dass sich Differentialformen bei Abbildungen gut verhalten, und für sie die äußere Ableitung erklärt ist.

4 Kräfte

4.1 Bezugssysteme

* Sei γ eine nach der Zeit parametrisierte Kurve in der Galilei-Mannigfaltigkeit (M, θ, g). Der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(\tau)$ ist ein Element der affinen Hyperebene $A_p \subset T_pM$ (wobei $p := \gamma(\tau)$), also ein Element eines affinen Raumes, und daher hat es keinen Sinn, von seiner Größe oder Richtung zu sprechen. Dazu müsste er ein Element eines Euklidischen Vektorraumes sein. Wählt man jedoch einen Bezugspunkt $b \in A_p$, so ist $\dot{\gamma}(\tau) - b \in V_p$, und das ist ein solcher Vektorraum (vermöge der Galilei-Metrik). Daher definieren wir: *

Sei (M, θ, g) eine Galilei-Mannigfaltigkeit. Ein **Bezugssystem** (oder auch **Beobachter**) ist ein Vektorfeld B auf einer offenen Menge U_B von M mit $\langle \theta, B \rangle = 1$, also ein Schnitt von A über U_B. Die **Relativgeschwindigkeit** einer nach der Zeit parametrisierten Kurve γ zu B ist $\dot{\gamma}(\tau) - B(\gamma(\tau)) \in V_{\gamma(\tau)}$, also ein raumartiger Vektor. Die **kinetische Energie bezüglich** B ist die Funktion $T_B \colon \pi^{-1}(U_B) \to \mathbb{R}$, die durch

$$T_B(a) = \frac{1}{2}\, g\big(a - B(p)\,, a - B(p)\big) \quad (a \in A_p)$$

(. . .)

definiert ist. Die kinetische Energie von γ bezüglich B ist $T_B(\dot\gamma)$.

In einer angepassten Karte hat B lokal die Form $\frac{\partial}{\partial x^0} + b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Nach bekannten Sätzen über gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es stets angepasste Karten, in denen B die Form $\frac{\partial}{\partial x^0}$ hat ("Ruhsystem" für den Beobachter B). Die kinetische Energie ist dann durch

$$T_B = \frac{1}{2} g_{ik} u^i u^k$$

gegeben. Umgekehrt definiert jede angepasste Karte $(U, x^0, \ldots, x^n)$ ein Bezugssystem durch $B \coloneqq \frac{\partial}{\partial x^0}$.

Die Wahl eines Bezugssystems liefert lokal eine "Aufspaltung" von M in Raum und Zeit. Das soll folgendes heißen: Fixiere einen Punkt $p_0 \in M$. Sei M_0 der instantane Raum durch p_0. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass B vollständig ist und den globalen Fluss (φ_s) erzeugt. Wegen $\mathcal{L}_B\, \theta = 0$ permutiert φ_s die instantanen Räume; insbesondere ist der instantane Raum durch $\varphi_s\,(p_0)$ gerade $\varphi_s\,(M_0)$. Die Abbildung $\mathbb{R} \times M_0 \to M$, $(s, q) \mapsto \varphi_s(q)$, ist in der Nähe von M_0 ein Diffeomorphismus. Die in einer Umgebung von M_0 definierte Umkehrabbildung $p \mapsto (t(p), r(p)) \in \mathbb{R} \times M_0$ ist dann die durch B definierte lokale Aufspaltung in Zeit und Raum.

4.2 Kräfte

* Das Vorliegen eines Kraftfeldes macht sich für einen Beobachter B dadurch bemerkbar, dass bei einer Bewegung, dargestellt durch eine nach der Zeit parametrisierte Kurve γ, eine gewisse Arbeit geleistet werden muss. Diese Arbeit ist Null, wenn die Relativgeschwindigkeit von γ zu B verschwindet. Der einfachste Ansatz ist also, sie als ein Integral der Form $\int \langle F\,, \dot{\gamma} - B \circ \gamma \rangle \, \mathrm{d}\tau$ darzustellen, wobei F eine Linearform auf dem Bündel V der raumartigen Vektoren ist. Es zeigt sich jedoch, dass man mit diesem "geschwindigkeitsunabhängigen" Kräften nicht auskommt (Lorentzkraft, Corioliskraft). Wir definieren daher: *

Sei (M, θ) eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur. Eine (geschwindigkeitsabhängige) Kraft ist eine fasertreue Abbildung

$$F \colon A \to V^*,$$

wobei $V^* = \bigcup_{p \in M} V_p^*$ das zu V duale Bündel bezeichnet. Für jedes $a \in A$ ist also F_a eine Linearform auf $V_{\pi(a)}$. Die Kraft heißt **geschwindigkeitsunabhängig**, wenn F_a nur von $\pi(a)$ abhängt. In diesem Fall kann man F als Schnitt von V^* oder als Linearform auf V betrachten. Die im Bezugssystem B bei einer Bewegung γ gegen F geleistete **Arbeit** ist definiert als

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\langle F_{\dot{\gamma}(\tau)}\,, \dot{\gamma}(\tau) - B(\gamma(\tau)) \right\rangle \mathrm{d}\tau.$$

Die Komponenten von F bezüglich einer Karte *(. . .)*

$(U; x^0, \dots, x^n)$ sind die Funktionen F_i auf $\pi^{-1}(U)$, die durch

$$F_i(a) = \left\langle F_a \, , \, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{\pi(a)} \right\rangle$$

definiert sind. Bei Kartenwechsel gilt

$$\tilde{F}_i \, \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} = F_k \, .$$

Die Kraft ist geschwindigkeitsunabhängig genau dann, wenn die F_i von den u^j nicht abhängen.

Vermöge des Isomorphismus $K_a \cong V_{\pi(a)}$ können (und werden) wir F_a auch als eine Linearform auf dem Bündel K_a auffassen, und bekommen damit eine Linearform auf dem Bündel K (bzw. einen Schnitt in K^*), die wir wieder mit F bezeichnen. Sei g eine Galilei-Metrik. Der durch g definierte Isomorphismus $\sharp \colon K^* \to K$ gestattet es, F einen Schnitt $F^\sharp \colon A \to K$ zuzuordnen. In Komponenten ist einfach

$$F^\sharp = F^i \, \frac{\partial}{\partial u^i} \quad \text{mit} \quad F^i = g^{ik} F_k.$$

Nun sei (M, θ, g, Z) ein mechanisches System. Dann ist auch $Z + F^\sharp$ eine Differentialgleichung 2. Ordnung (vgl. 2.2), und wir definieren: **Das aus** (M, θ, g, Z) **durch Einwirkung der Kraft** F **entstehende System** ist $(M, \theta, g, Z + F^\sharp)$. Beispiel: das System "Teilchen im elektromagnetischen Feld" entsteht aus dem freien Teilchen durch Einwirken der Lorentzkraft F mit den Komponenten

$$F_i = e \left(E_i + u^j B_k - u^k B_j \right) .$$

Zur Beschreibung der Wirkungsform zu $Z + F^\sharp$, aber auch zur Charakterisierung verschiedener Typen von Kräften, brauchen wir einen neuen mathematischen Begriff, nämlich:

4.3 Semibasische Differentialformen

Eine k-Form ω auf A heißt **semibasisch**, wenn $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$, sobald einer der Vektoren v_i vertikal ist, also in K liegt. Äquivalent ist, dass in dem Kartenausdruck von ω kein $\mathrm{d}u^i$ vorkommt; dagegen dürfen die Koeffizienten von ω von den u^i abhängen. Offenbar ist jede basische Differentialform semibasisch. Die semibasischen Formen sind abgeschlossen unter äußerer Multiplikation, jedoch nicht unter äußerer Ableitung; denn es gilt: ist ω und $\mathrm{d}\omega$ semibasisch, dann ist ω schon basisch. Insbesondere ist eine geschlossene semibasische Form basisch. Dagegen ist mit ω auch $\partial\omega$ semibasisch.

Sei Z eine Differentialgleichung 2. Ordnung und ω eine semibasische k-Form. Dann ist $Z \lrcorner\, \omega$ eine semibasische $(k-1)$-Form, die überdies von der Wahl von Z unabhängig ist; denn eine andere Differentialgleichung 2. Ordnung ist von der Form $Z' = Z + Y$ mit einem Schnitt Y von K, und $Y \lrcorner\, \omega = 0$, weil ω semibasisch ist. Es gilt die Formel *(...)*

$$\partial(Z \lrcorner\, \omega) + Z \lrcorner\, \partial\omega + \theta \wedge (Z \lrcorner\, \omega) = k\, \omega. \tag{4.1}$$

Zum Beweis überlegt man sich, dass die linke und die rechte Seite Derivationen der Algebra der semibasischen Formen definieren, die auf den semibasischen 0-Formen (Funktionen) und 1-Formen übereinstimmen, und daher gleich sind.

4.4 Der Zusammenhang zwischen semibasischen Formen und Kräften

Satz 5. *Die folgenden Formeln definieren Bijektionen zwischen*

(a) den Kräften, also den Linearformen $F\colon K \to \mathbb{R}$,

(b) den semibasischen 1-Formen φ mit $Z \lrcorner\, \varphi = 0$,

(c) den semibasischen 2-Formen Φ mit $\partial\Phi = 0$:

$$\varphi = F \circ \mu, \tag{4.2}$$

$$\Phi = -\tfrac{1}{2}\left(\partial\varphi + \theta \wedge \varphi\right), \quad \varphi = -Z \lrcorner\, \Phi. \tag{4.3}$$

In den Komponenten F_i von F ausgedrückt ist

$$\varphi = F_i \left(\mathrm{d}x^i - u^i\, \mathrm{d}t\right), \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \Phi = {} & F_i\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial F_i}{\partial u^k}\left(\mathrm{d}x^i - u^i\, \mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - u^k\, \mathrm{d}t\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Beweis. Wegen $\mu(K) = \mu(Z) = 0$ ist $F \circ \mu$ eine semibasische 1-Form mit $Z \lrcorner\, (F \circ \mu) = 0$. Umgekehrt verschwindet eine semibasische 1-Form φ mit $Z \lrcorner\, \varphi = 0$ auf $\operatorname{Ker} \mu$, und definiert daher eine Linearform F auf $TA/\operatorname{Ker}\mu \cong K$. Das zeigt die Bijektion zwischen (a) und (b). Weiter ist *(...)*

$$\partial(\partial\varphi + \theta \wedge \varphi) = \partial\partial\varphi + \partial\theta \wedge \varphi - \theta \wedge \partial\varphi = \theta \wedge \partial\varphi - \theta \wedge \partial\varphi = 0$$

nach 3.5 und $Z \lrcorner (-Z \lrcorner \Phi) = \Phi(Z, Z) = 0$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
&- Z \lrcorner \left(-\tfrac{1}{2}(\partial\varphi + \theta \wedge \varphi)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(Z \lrcorner \partial\varphi + (Z \lrcorner \theta) \wedge \varphi - \theta \wedge (Z \lrcorner \varphi)\big) = \tfrac{1}{2}\big(Z \lrcorner \partial\varphi + \varphi\big) \\
&= \varphi,
\end{aligned}$$

nach (4.1), angewandt auf $\omega = \varphi$, und

$$-\frac{1}{2}\big(\partial(-Z \lrcorner \Phi) + \theta \wedge (-Z \lrcorner \Phi)\big) = \frac{1}{2}\big(\partial(Z \lrcorner \Phi) + \theta \wedge (Z \lrcorner \Phi)\big) = \Phi,$$

wiederum nach (4.1), angewandt auf $\omega = \Phi$. Damit folgt die Behauptung. Die Formeln (4.4) und (4.5) folgen durch einfache Rechnung. □

Satz 6. *Sei (M, θ, g, Z) ein mechanisches System mit Wirkungsform Ω und F eine Kraft. Die Wirkungsform zu $(M, \theta, g, Z + F^\sharp)$ ist dann $\Omega + \Phi$, wobei Φ die nach Satz 5 zu F gehörige 2-Form ist.*

Beweis. Man sieht sofort, dass $\Omega + \Phi$ eine Wirkungsform ist (also den Bedingungen (i)-(iii) von Satz 4 genügt) und dieselbe Galilei-Metrik wie Ω induziert. Es bleibt zu zeigen, dass $\big(Z+F^\sharp\big) \lrcorner \big(\Omega+\Phi\big) = 0$. Wegen $Z \lrcorner \Omega = F^\sharp \lrcorner \Phi = 0$ ist dies mit $F^\sharp \lrcorner \Omega = -Z \lrcorner \Phi = F \circ \mu$ äquivalent. Nach Definition von Ω ist

$$(F^\sharp \lrcorner \Omega)(v) = g\left(\eta(F^\sharp), \mu(v)\right) - g\left(\eta(v), \mu(F^\sharp)\right).$$

Nun gilt $\mu(F^\sharp) = 0$ und $\eta(F^\sharp) = F^\sharp$, also folgt nach Definition von $F^\sharp$:

$$(F^\sharp \lrcorner \Omega)(v) = g\left(F^\sharp, \mu(v)\right) = F(\mu(v)).$$

Das ist die Behauptung. □

Nach Satz 5 können wir Kräfte mit ∂-geschlossenen semibasischen 2-Formen identifizieren. Wir definieren: Eine Kraft heißt **basisch** bzw. **geschlossen**, wenn die 2-Form Φ basisch bzw. geschlossen ($\mathrm{d}\Phi = 0$) ist. Ein geschlossenes Φ ist basisch, aber nicht umgekehrt. Beispiele: Die Lorentzkraft ist geschlossen; die beim harmonischen Oszillator auftretende Reibungskraft $-2\rho \sum u^i \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}t$ ist nicht basisch. In Komponenten drücken sich diese Eigenschaften folgendermaßen aus: F ist basisch, wenn die F_i die Form

$$F_i = E_i + B_{ik} u^k$$

mit den von den u^j unabhängigen Funktionen E_i, $B_{ik} = -B_{ki}$ haben. Das zugehörige Φ ist dann

$$\Phi = E_i \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}t + \frac{1}{2} B_{ik} \,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k.$$

F ist geschlossen, wenn die "verallgemeinerten Maxwell-Gleichungen"

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial E_i}{\partial x^k} - \frac{\partial E_k}{\partial x^i}, \qquad \sum_{\text{zykl.}} \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} = 0$$

gelten. Das ist nur eine Umschreibung von $\mathrm{d}\Phi = 0$. Eine geschlossene Kraft Φ besitzt nach dem Poincaréschen Lemma lokal ein (Vektor-)Potential; d. h. zu jedem $p \in M$ gibt es eine Umgebung U und eine 1-Form α auf U mit $\mathrm{d}\alpha = \Phi | U$. Ist Φ geschwindigkeitsunabhängig, so kann man ein Potential der Form $\alpha = -f \,\mathrm{d}t$ finden, mit einer Potentialfunktion f, die nur bis auf Addition einer nur von der Zeit *(...)*

abhängigen Funktion bestimmt ist.

4.5 Das Newtonsche Gesetz

Sei (M, θ, g, Z) ein mechanisches System und B ein Beobachter. Wir zeigen, dass sich die Wirkungsform Ω relativ zu B in einen "kinematischen" Anteil Ω_B und einen "dynamischen" Anteil Φ_B (eine Kraft) zerlegen lässt, und dass bei geeigneter Definition der Beschleunigung einer Bewegung relativ zu B das Newtonsche Gesetz "Masse $\times$ Beschleunigung $=$ Kraft" gilt. Sei T_B die kinetische Energie relativ zu B (vgl. 4.1).

Lemma 2. $\Omega_B := \mathrm{d}(\partial T_B + T_B \, \mathrm{d}t)$ *ist eine Wirkungsform, die die Galilei-Metrik g induziert. Die Differenz $\Phi_B := \Omega - \Omega_B$ ist eine Kraft. (Falls B auf der offenen Menge $U_B \subset M$ erklärt ist, dann sind natürlich Ω_B und Φ_B auf $\pi^{-1}(U_B)$ erklärt).*

Beweis. Wir haben die Eigenschaften (i)-(iii) von Satz 4 zu prüfen. Nach den Regeln für ∂ ist

$$\partial\Omega_B = -\mathrm{d}\big(\partial\partial T_B - \partial T_B \wedge \mathrm{d}t\big) = -\mathrm{d}\big(\mathrm{d}t \wedge \partial T_B + \partial T_B \wedge \mathrm{d}t\big) = 0.$$

Zum Nachweis von (i) und (ii) benutzt man am einfachsten ein Ruhsystem für B. Dann ist $T_B = \frac{1}{2} g_{ik} u^i u^k$, folglich (mit $p_i := g_{ik} u^k = \frac{\partial T_B}{\partial u^i}$ und wegen $2T = p_i u^i$) $\partial T_B + T_B \, \mathrm{d}t = p_i \, \mathrm{d}x^i - T_B \, \mathrm{d}t$, und $\Omega_B = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}T_B \wedge \mathrm{d}t$, was sich zu

$$\Omega_B = \left(\mathrm{d}p_i - \frac{\partial T_B}{\partial x^i}\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right)$$

umformen lässt. Hiernach ist klar, dass Ω_B auf $\operatorname{Ker}\mu$ verschwindet. Ferner ist

$$\Omega_B\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\,,\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial u^k} = g_{ik}.$$

Ein Vergleich von Ω_B mit (3.4) zeigt, dass $\Omega - \Omega_B$ semibasisch ist. Die Behauptung folgt wegen $\partial\,(\Omega - \Omega_B) = \partial\Omega - \partial\Omega_B = 0$. $\square$

Sei γ eine nach der Zeit parametrisierte Kurve, und Z_B die Bewegungsgleichung zu Ω_B. Die 2. Ableitung $\ddot{\gamma}(\tau)$ ist ein Element von $T_{\dot{\gamma}(\tau)}A$; insbesondere hat es, wie im Fall von $\dot{\gamma}(\tau)$, keinen Sinn, von ihrer Größe zu sprechen. Dagegen ist $\mathrm{D}\pi\big(\ddot{\gamma}(\tau) - Z_B(\dot{\gamma}(\tau))\big) = \dot{\gamma}(\tau) - \mathrm{D}\pi\big(Z_B(\dot{\gamma}(\tau))\big) = 0$, also $\ddot{\gamma}(\tau) - Z_B(\dot{\gamma}(\tau)) \in K_{\dot{\gamma}(\tau)} \cong V_{\gamma(\tau)}$. Wir definieren: **Die Beschleunigung von γ relativ zu B an der Stelle τ ist $\ddot{\gamma}(\tau) - Z_B(\dot{\gamma}(\tau))$** (bzw. auch der diesem Vektor entsprechende raumartige Vektor in $V_{\gamma(\tau)}$).

Um diese Definition zu motivieren, betrachten wir eine relativ zu B unbeschleunigte Kurve γ, für die also $\ddot{\gamma} = Z_B(\dot{\gamma})$ gilt. Auf Grund der im Beweis des Lemmas erhaltenen Formel

$$\Omega_B = \left(\mathrm{d}\left(\frac{\partial T_B}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial T_B}{\partial x^i}\,\mathrm{d}t\right) \wedge \left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right) \tag{4.6}$$

ist klar, dass Z_B durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{d}\left(\frac{\partial T_B}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial T_B}{\partial x^i}\,\mathrm{d}t\,, Z_B\right\rangle &= \left\langle \mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\,, Z_B\right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{d}t\,, Z_B\right\rangle - 1 = 0\end{aligned}$$

definiert ist, und daher γ den Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial T_B}{\partial u^i}\circ\dot\gamma\right)-\frac{\partial T_B}{\partial x^i}\circ\dot\gamma=0$$

genügt. Dies sind aber gerade die Eulerschen Gleichungen des durch T_B definierten Variationsproblems. Da T_B der starken Legendre Bedingung genügt ($\frac{\partial^2 T_B}{\partial u^i \partial u^k}$ positiv definit), minimieren die Lösungen der Eulerschen Gleichungen lokal das Funktional $\int (T_B\circ\dot\gamma)\,\mathrm{d}\tau$. Als explizite Formel für Z_B und die Beschleunigung bekommt man, falls $B=\frac{\partial}{\partial t}$,

$$Z_B=\frac{\partial}{\partial t}+u^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\left(\Gamma^i_{jk}u^ju^k+g^{ij}\frac{\partial g_{jk}}{\partial t}u^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\ddot\gamma-Z_B\circ\dot\gamma&=g^{ik}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial T_B}{\partial u^i}\circ\gamma\right)-\frac{\partial T_B}{\partial x^i}\circ\gamma\right)\frac{\partial}{\partial u^i}\\&=\left(\ddot\gamma^i+\Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j\dot\gamma^k+g^{ij}\frac{\partial g_{jk}}{\partial t}\dot\gamma^k\right)\frac{\partial}{\partial u^i},\end{aligned} \tag{4.8}$$

wobei $\gamma^i=x^i\circ\gamma$ die Komponenten von γ sind, und die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} wie üblich (bei festgehaltenem t) aus den g_{ik} zu berechnen sind.

Weiter definieren wir Φ_B (bzw. das nach Satz 5 zugeordnete $F_B\colon K\to\mathbb{R}$) als **die im Bezugssystem B auftretende Kraft**. Wegen $\Omega=\Omega_B+\Phi_B$ gilt für die Bewegungsgleichung $Z=Z_B+F_B^\sharp$, und eine nach der Zeit parametrisierte Kurve γ ist eine Bewegung des mechanischen Systems genau dann, wenn $\ddot\gamma=Z\circ\dot\gamma$, also

$$\ddot\gamma-Z_B(\dot\gamma)=F_B(\dot\gamma),$$

oder, äquivalent,

$$g\big(\ddot{\gamma} - Z_B(\dot{\gamma})\,,\,\cdot\,\big) = F_B(\dot{\gamma}). \tag{4.9}$$

Das ist das Newtonsche Gesetz ”Masse $\times$ Beschleunigung = Kraft“; die Metrik g spielt die Rolle der Masse. Sind $F_{i,B}$ die Komponenten von F_B, so lautet die Gleichung (4.9) wegen (4.7)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial T_B}{\partial u^i}\circ\dot{\gamma}\right) - \frac{\partial T_B}{\partial x^i}\circ\dot{\gamma} = F_{i,B}\circ\gamma, \tag{4.10}$$

(sog. Lagrangesche Gleichungen 2. Art).

4.6 Trägheitskräfte

Betrachte wieder ein mechanisches System (M,θ,g,Z) und zwei Beobachter B und $\tilde{B}$. Wie unterscheiden sich die von B und $\tilde{B}$ ”bemerkten“ Kräfte Φ_B und $\Phi_{\tilde{B}}$? Aus

$$\Omega = \Omega_B + \Phi_B = \Omega_{\tilde{B}} + \Phi_{\tilde{B}} \tag{4.11}$$

folgt

$$\Phi_B = \Phi_{\tilde{B}} + (\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B)\,. \tag{4.12}$$

Als Differenz zweier exakter 2-Formen ist $\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B$ exakt. Als Differenz der Kräfte Φ_B und $\Phi_{\tilde{B}}$ ist $\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B$ eine Kraft. Wir nennen sie die **Trägheitskraft** zwischen B und $\tilde{B}$. Die in B auftretende Kraft Φ_B setzt sich also zusammen aus der in $\tilde{B}$ auftretenden Kraft $\Phi_{\tilde{B}}$ und der Trägheitskraft $\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B$. Man bemerke, dass $\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B$ nur von (M,θ,g) und natürlich von B und $\tilde{B}$ abhängt, *(...)*

nicht dagegen von Z (sie ist also eine "kinematische" Größe).

Wir können (4.11) auch folgendermaßen interpretieren: Eine Galilei-Mannigfaltigkeit (M, θ, g) liefert für je zwei Beobachter B, $\tilde{B}$ eine Kraft $\Psi_{B,\tilde{B}} := \Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B$. Die Angabe eines mechanischen Systems auf (M, θ, g) ist äquivalent mit der Angabe einer Kraft Φ_B für jeden Beobachter B, und zwar so, dass für je zwei Beobachter die Differenz $\Phi_B - \Phi_{\tilde{B}}$ gerade gleich $\Psi_{B,\tilde{B}}$ ist.

Um zu einer expliziten Formel für $\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B$ zu kommen, sei $\alpha = \alpha_{B,\tilde{B}}$ die durch

$$\langle \alpha \, , B \rangle = \frac{1}{2} \, g\big(B - \tilde{B} \, , B - \tilde{B}\big)$$

$$\langle \alpha \, , v \rangle = g\big(v \, , B - \tilde{B}\big) \quad (v \text{ raumartiger Vektor})$$

definierte 1-Form auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche U_B und $U_{\tilde{B}}$. Dann gilt

$$\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B = \mathrm{d}\alpha_{B,\tilde{B}} \, .$$

Zum Beweis verwendet man am einfachsten eine Karte, in der $B = \frac{\partial}{\partial t}$, $\tilde{B} = B - b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist. Dann rechnet man leicht nach, dass

$$\partial \left(T_{\tilde{B}} - T_B \right) + \left(T_{\tilde{B}} - T_B \right) \mathrm{d}t = g_{ik} b^k \, \mathrm{d}x^i + \frac{1}{2} g_{ik} b^i b^k \, \mathrm{d}t = \alpha_{B,\tilde{B}}$$

ist. Weiter kann man zeigen, dass

$$\Omega_{\tilde{B}} - \Omega_B = \pi^* B^* \left(\Omega_{\tilde{B}} \right)$$

gilt ($B \colon U_B \to A$ ist ein Schnitt, daher ist die zurückgeholte Form $B^* \left(\Omega_{\tilde{B}} \right)$ eine 2-Form auf *(...)*

$U_{\tilde{B}} \cap U_B$. Wir sagen, B sei gegen $\tilde{B}$ **unbeschleunigt**, wenn $\Omega_B - \Omega_{\tilde{B}} = 0$. Das ist also mit der Geschlossenheit von $\alpha_{B,\tilde{B}}$ äquivalent.

Beispiel. Betrachten wir eine flache Galilei-Mannigfaltigkeit M mit $n = 2$, und zwei Karten (t, x, y) und $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$, in denen die Komponenten der Metrik durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Es seien $B := \frac{\partial}{\partial t}$ und $\tilde{B} := \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$, und es rotiere B gegen $\tilde{B}$ mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω; d. h. $\tilde{x} = x \cos \omega t - y \sin \omega t$, $\tilde{y} = x \sin \omega t + y \cos \omega t$.

Es empfiehlt sich, Polarkoordinaten einzuführen: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, ebenso für das geschlängelte System. Dann ist $\tilde{r} = r$, $\tilde{\varphi} = \varphi + \omega t$, $t = \tilde{t}$, und daher

$$B = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{B} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Die Koeffizienten der Metrik in Polarkoordinaten sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\alpha_{B,\tilde{B}} = r^2 \omega \, \mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \, \mathrm{d}t$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_{B,\tilde{B}} = \mathrm{d}\alpha_{B,\tilde{B}} &= 2\omega r \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi + \omega^2 r \, \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}t \\ &= 2\omega \, dx \wedge \mathrm{d}y + \omega^2 (x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Der erste Term ist die **Corioliskraft**, der zweite die **Zentrifugalkraft**. Für die Komponenten von $\Psi_{B,\tilde{B}}$ im System (t, x, y) bekommt man *(. . .)*

$$F_x = 2\omega v + \omega^2 x,$$

$$F_y = -2\omega u + \omega^2 y,$$

wobei die Koordinaten in A mit (t, x, y, u, v) bezeichnet sind.

5 Galilei-Zusammenhänge

5.1 Zusammenhänge und quadratische Differentialgleichungen

Sei (M,θ) eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur. Ein linearer Zusammenhang ∇ (identifiziert mit einer kovarianten Ableitung) heißt mit der Zeitstruktur **verträglich**, wenn $\nabla\theta = 0$. Sei $(U; x^0, \ldots, x^n)$ eine angepasste Karte. Die Zusammenhangsformen ω^λ_μ von ∇ und die Komponenten $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ sind durch

$$\nabla\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \otimes \omega^\lambda_\mu, \quad \omega^\lambda_\mu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\,\mathrm{d}x$$

definiert (griechische Indizes laufen von 0 bis n). Dann ist $\nabla\theta = \nabla\left(\mathrm{d}x^0\right) = -\omega^0_\lambda \otimes \mathrm{d}x^\lambda = 0$ äquivalent mit $\omega^0_\lambda = 0$ bzw. $\Gamma^0_{\nu\mu} = 0$. Für eine Geodätische γ von ∇ gilt $\langle \theta\,, \dot\gamma \rangle = \mathrm{const}$; denn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\langle \theta\,, \dot\gamma \rangle = \left\langle \nabla_{\dot\gamma}\theta\,, \dot\gamma \right\rangle + \left\langle \theta\,, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \right\rangle = 0.$$

Es ist also entweder $\langle \theta\,, \dot\gamma \rangle = 0$ (raumartige Geodätische) oder nach geeigneter Umparametrisierung $\langle \theta\,, \dot\gamma \rangle = 1$ (nach der Zeit parametrisierte Geodätische).

Zu ∇ gehört das geodätische Vektorfeld X_∇ auf TM, dessen nach M projizierte Integralkurven gerade die Geodätischen sind. Aus $\nabla\theta = 0$ *(...)*

folgt, dass X_∇ tangential an die Untermannigfaltigkeit A von TM ist und daher eine Differentialgleichung 2. Ordnung Z_∇ auf A induziert, die lokal durch

$$Z_\nabla = \frac{\partial}{\partial x^0} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu \frac{\partial}{\partial u^i}$$

gegeben ist. Dabei sei $u^0 = 1$ gesetzt. Die nach M projizierten Integralkurven von Z_∇ sind gerade die nach der Zeit parametrisierten Geodätischen. Eine Differentialgleichung 2. Ordnung Z auf A heiße **quadratisch**, wenn in jeder lokalen Karte die Komponenten Z^i von Z inhomogen quadratisch in den Geschwindigkeiten u^j sind. Wegen (3.2) ist diese Bedingung unabhängig von der speziellen Kartenwahl. Offenbar ist Z_∇ quadratisch. Umgekehrt gilt für ein quadratisches Z lokal

$$Z^i = -\Gamma^i_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu$$

mit nur von den x^ν abhängigen Funktionen $\Gamma^i_{\nu\mu} = \Gamma^i_{\mu\nu}$ auf U. Setzt man noch $\Gamma^0_{\lambda\mu} := 0$, so stellt man durch direkte Rechnung fest, dass sich die $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ wie die Komponenten eines Zusammenhangs transformieren. Man hat damit jeder quadratischen Differentialgleichung Z einen (wegen $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}$) torsionsfreien, mit θ verträglichen Zusammenhang zugeordnet, und bekommt so eine **Bijektion** zwischen solchen Zusammenhängen und quadratischen Differentialgleichungen. Die zu Z gehörigen 1-Formen η^i *(...)*

(vgl. 3.2) sind mit den Zusammenhangsformen durch

$$\eta^i = \mathrm{d}u^i + \omega^i_\lambda u^\lambda \tag{5.1}$$

verknüpft.

5.2 Galilei-Zusammenhang

Sei g eine Galilei-Metrik auf (M, θ). Ein torsionsfreier, mit θ verträglicher Zusammenhang ∇ heißt mit g verträglich oder **Galileisch**, wenn $\nabla g = 0$. In einer Karte drückt sich dies durch

$$\mathrm{d}g_{ik} = \omega^j_i g_{jk} + g_{ij}\omega^j_k \tag{5.2}$$

aus, und für die Komponenten von ∇ ist (5.2) äquivalent mit

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\, g^{im} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \tag{5.3}$$

und

$$\Gamma^j_{i0}\, g_{jk} + g_{ij}\, \Gamma^j_{k0} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial t}. \tag{5.4}$$

Ein Galilei-Zusammenhang ist keineswegs eindeutig bestimmt (im Gegensatz zum Riemannschen Fall!); in der Tat ist durch (5.4) nur der bezüglich g_{ik} symmetrische Anteil von Γ^j_{i0} festgelegt, und Γ^i_{00} ist völlig frei.

Lemma 3. *Sei B ein Bezugssystem und Z_B die zu Ω_B gehörige Bewegungsgleichung (vgl. 4.5). Dann ist Z_B quadratisch, und der dadurch bestimmte Zusammenhang ∇^B ist Galileisch. Die Beschleunigung einer nach der* *(...)*

Zeit parametrisierten Kurve γ gegenüber B ist $\frac{\nabla^B \dot{\gamma}}{\mathrm{d}t}$

Dies folgt sofort aus (4.7) und (4.8). Man beachte, dass die Komponenten von ∇^B, falls $B = \frac{\partial}{\partial t}$, durch die obige Formel (5.3) sowie

$$\Gamma^i_{j0,B} = \frac{1}{2}\, g^{ik} \frac{\partial g_{kj}}{\partial t}, \quad \Gamma^i_{00,B} = 0 \tag{5.5}$$

gegeben sind.

Satz 7. *Sei (M, θ, g, Z) ein mechanisches System mit Wirkungsform Ω. Folgende Bedingungen sind äquivalent.*

(i) Z ist quadratisch und der zugehörige Zusammenhang ∇ ist Galileisch;

(ii) $\mathrm{d}\Omega$ *ist basisch*

(iii) für alle Bezugssysteme B ist die Kraft Φ_B basisch.

Bemerkung. Nach 4.6 ist $\Phi_B - \Phi_{\tilde{B}}$ geschlossen und semibasisch, also basisch. Ist also (iii) für ein B erfüllt, dann auch für alle anderen.

Beispiele. Das Teilchen im elektromagnetischen Feld erfüllt diese Bedingungen (allgemeiner jedes geschlossene System) dagegen nicht der harmonische Oszillator mit Reibung.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei B ein Beobachter und *(...)*

$(U; x^0, \ldots, x^n)$ eine Karte mit $B = \frac{\partial}{\partial t}$. Nach (5.1) ist

$$\Omega = g_{ik} \left(\mathrm{d}u^i + \omega^i_\lambda u^\lambda \right) \wedge \left(\mathrm{d}x^k - u^k \, \mathrm{d}t \right), \tag{5.6}$$

und mit (5.3), (5.4), (5.5) folgt $\Omega = \Omega_B + \Phi_B$ mit

$$\Phi_B = g_{ik} \, \Gamma^i_{00} \, \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x^k - \frac{1}{2} \big(g_{ik} \, \Gamma^i_{j0} - g_{ij} \, \Gamma^i_{k0} \big) \, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k.$$

Also ist Φ_B und damit auch $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Phi_B$ basisch (beachte $\mathrm{d}\Omega_B = 0$ nach 4.5).

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Aus $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Phi_B$ basisch folgt Φ_B basisch, denn allgemein überlegt man sich leicht, dass für eine semibasische Form σ die äußere Ableitung

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}u^i \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u^i} + \text{semibasische Form}$$

wieder semibasisch ist, wenn

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \lrcorner \, \mathrm{d}\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial u^i},$$

also σ schon basisch ist.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei Φ_B basisch. Für die Komponenten F_i der zugehörigen Kraft F_B gilt dann

$$F_i = E_i + B_{ik} u^k$$

mit schiefsymmetrischen B_{ik}, und es ist $Z = Z_B + F_B^\sharp$; also

$$Z^i = -\Gamma^i_{\lambda\mu,B} \, u^\lambda u^\mu + g^{ij} \left(E_j + B_{jk} u^k \right) = -\Gamma^i_{\lambda\mu} \, u^\lambda u^\mu$$

quadratisch. Auf Grund des Lemmas genügen die $\Gamma^i_{\lambda\mu,B}$ den Bedingungen (5.3) und (5.4), und weil die B_{jk} *(...)*

schiefsymmetrisch sind, folgt dies auch für die $\Gamma^i_{\lambda\mu}$. Also ist der zu Z gehörige Zusammenhang Galileisch. $\square$

Wir geben noch eine Formel für $\mathrm{d}\Omega$, ausgedrückt durch den Krümmungstensor von ∇, an. Da $\mathrm{d}\Omega$ basisch ist, also von den u^i nicht abhängt, kann man zur Berechnung von $\mathrm{d}\Omega$ in (5.6) erst die $u^i = 0$ setzen und dann differenzieren. Das ergibt unter Verwendung von (5.2)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Omega &= \mathrm{d}\big(g_{ik}\,\omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k\big) = \mathrm{d}g_{ik} \wedge \omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k + g_{ik}\,\mathrm{d}\omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k \\ &= \omega^j_i g_{jk} \wedge \omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k + g_{ij}\,\omega^j_k \wedge \omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k + g_{ik}\,\mathrm{d}\omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k.\end{aligned}$$

Nun gelten die Strukturgleichungen

$$\omega^i_\lambda \wedge \mathrm{d}x^\lambda = 0, \quad \mathrm{d}\omega^\nu_\lambda + \omega^\nu_\mu \wedge \omega^\mu_\lambda = \Omega^\nu_\lambda\,.$$

Die erste drückt die Torsionsfreiheit von ∇ aus; in der zweiten hängen die Krümmungsformen Ω^ν_λ mit dem Krümmungstensor durch

$$\Omega^\nu_\lambda = \frac{1}{2}\,R^\nu_{\lambda\mu\rho}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\rho$$

zusammen. Damit bekommt man

$$\Omega = g_{ik}\,\Omega^i_0 \wedge \mathrm{d}x^k = \frac{1}{2}\,g_{ik} R^i_{0\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^k.$$

5.3 Freie Systeme

Ein mechanisches System heißt **lokal frei**, wenn es lokal isomorph zum "freien Teilchen" ist; genauer: zu jedem Punkt von M gibt es eine Umgebung U, sodass das auf U eingeschränkte System isomorph zur Einschränkung des freien Teilchens auf eine offene Menge U' des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Eine äquivalente Formulierung ist: um jeden Punkt von M gibt es eine angepasste Karte $(U; x^0, \ldots, x^n)$, sodass die Wirkungsform die Gestalt

$$\Omega|_{\pi^{-1}(U)} = \sum \mathrm{d}u^i \wedge \left(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\right) \tag{5.7}$$

hat.

Satz 8. *Ein mechanisches System (M, θ, g, Z) ist lokal frei dann und nur dann, wenn $Z = Z_\nabla$ für einen Galilei-Zusammenhang ∇, und der Krümmungstensor von ∇ verschwindet.*

Beweis. Falls Ω lokal die Form (5.7) hat, so ist $Z = \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, also $Z^i = 0$, $g_{ik} = \delta_{ik}$, daher Z quadratisch, ∇ Galileisch, und die Zusammenhangsformen von ∇ sind Null, also auch der Krümmungstensor. Umgekehrt gibt es nach bekannten Sätzen über lineare Zusammenhänge um jeden Punkt Karten $(U; x^0, \ldots, x^n)$, sodass die Zusammenhangsformen ω^λ_μ verschwinden. Sei $\theta|U = f_\lambda \mathrm{d}x^\lambda$ in einer solchen Karte. Dann ist $\nabla\theta = \mathrm{d}f_\lambda \otimes \mathrm{d}x^\lambda = 0$, also sind die f_λ konstant. Ersetzt man die x^λ durch $a^\lambda_\mu x^\mu$ mit einer geeigneten nicht singulären konstanten Matrix $\left(a^\lambda_\mu\right)$, so kann man $\theta|U = \mathrm{d}x^0$ erreichen, ohne die Eigenschaft $\omega^\lambda_\mu = 0$ zu verlieren. Nach (5.2) ist dann $\mathrm{d}g_{ik} = 0$, also sind die g_{ik} konstant. Wiederum durch Ersetzen von x^i durch $b^i_k x^k$ mit geeigneter konstanter Matrix (b^i_k) kann man $g_{ik} = \delta_{ik}$ erzwingen und hat dann wegen $\omega^\lambda_\mu = 0$ für Ω die Form (5.7). $\square$

Aus diesem Satz folgt mit Hilfe bekannter Tatsachen über lineare Zusammenhänge: (M, θ, g, Z) ist **frei**, also isomorph zum freien Teilchen, genau dann, wenn es lokal frei ist, und M einfach zusammenhängend und ∇ vollständig ist.

6 Induzierte Systeme und Produkte

6.1 Induzierte Systeme

Sei (M, θ, g, Z) ein mechanisches System mit Wirkungsform Ω, und $f\colon M' \to M$ eine Immersion einer Mannigfaltigkeit M' nach M. Wir nennen f mit der Zeitstruktur **verträglich**, falls $\theta' := f^*\theta$ eine Zeitstruktur auf M' ist. In diesem Fall induziert g eine Galilei-Metrik $g' := f^*g$ auf M':

$$g'(v_1\,, v_2) = g\big(\mathrm{D}f(v_1)\,, \mathrm{D}f(v_2)\big),$$

und $\mathrm{D}f\colon TM' \to TM$ bildet A' nach A ab.

Satz 9. *$\Omega' := (\mathrm{D}f)^*\Omega$ ist eine Wirkungsform auf A', die die Galilei-Metrik g' induziert. Ist Ω geschlossen (bzw. $\mathrm{d}\Omega$ basisch) dann auch Ω' (bzw. $\mathrm{d}\Omega'$).*

Beweis. $\mathrm{D}(\mathrm{D}f)$ bildet K' nach K ab und vertauscht mit der kanonischen 1-Form μ bzw. μ':

$$\mu \circ \mathrm{D}(\mathrm{D}f) = \mathrm{D}(\mathrm{D}f) \circ \mu'.$$

Ferner ist mit σ auch $(\mathrm{D}f)^*\sigma$ basisch, bzw. semibasisch, und $(\mathrm{D}f)^*$ vertauscht mit d und ∂. Daraus folgt leicht die Behauptung. $\square$

Wir nennen (M', θ', g', Z'), wo Z' die durch Ω' definierte Bewegungsgleichung ist, **das durch f auf M' induzierte mechanische System**. Offenbar ist f ein Morphismus der mechanischen Systeme.

Spezialfälle

(a) **Holonome Bindungen**. Sei $M' \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit und f die Inklusion. Lokal wird M' durch r Gleichungen

$$g_i(t, x^1, \ldots, x^n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, r)$$

beschrieben. Die Verträglichkeit mit der Zeitstruktur bedeutet, dass die Differentiale $\mathrm{d}t, \mathrm{d}g_1, \ldots, \mathrm{d}g_r$ überall linear unabhängig sind, oder die Matrix

$$\left(\frac{\partial g_j}{\partial x^k}\right)$$

überall den Rang r hat. In diesem Fall ist $\theta' = \theta|M'$, $A' = A \cap TM'$, und $\Omega' = \Omega|A'$. Man nennt M' eine **holonome Bindung**.

(b) **Lokale Diffeomorphismen**. Sei $f\colon M' \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus. Dann ist f automatisch mit der Zeitstruktur verträglich und induziert damit ein mechanisches System auf M'. Wichtige Fälle sind: $M' \subset M$ offen (Einschränkung auf eine offene Teilmenge), und $f\colon M' \to M$ die universelle Überlagerung von M.

6.2 Das d'Alembertsche Prinzip

Üblicherweise wird die Bewegungsgleichung Z' des induzierten Systems nicht aus der zurückgeholten Wirkungsform $(\mathrm{D}f)^*\Omega = \Omega'$ hergeleitet, sondern aus dem d'Alembertschen Prinzip: "Bei einer mit den Bindungen verträglichen virtuellen Verrückung leisten die Zwangskräfte keine Arbeit". Wir zeigen, dass dies auf dasselbe Ergebnis führt.

Da das Problem lokal ist, können wir annehmen, dass $M' \subset M$ eine holonome Bindung ist. Sei $p \in M'$ und $a \in A'_p$. Eine mit der Bindung verträgliche virtuelle Verrückung ist einfach ein raumartiger Tangentialvektor $v \in V'_p = V_p \cap T_pM'$ bzw., für uns praktischer, ein Vektor in $K'_a \cong V'_p$. Für die Bewegungsgleichungen Z und Z' gilt $\mathrm{D}\pi\big(Z(a)\big) = \mathrm{D}\pi\big(Z'(a)\big) = a$, also $\mathrm{D}\pi\big(Z(a) - Z'(a)\big) = 0$ oder $Z(a) - Z'(a) \in K_a$. Daher ist $F_a := \big(Z(a) - Z'(a)\big)^\flat$ eine Linearform auf K_a, genannt die **Zwangskraft** an der Stelle a. Die Zwangskraft F ist also der durch $F = \big(Z|A - Z'\big)^\flat$ definierte Schnitt von K^* über A'. Nach Definition gilt $\Omega\big(Z(a)\,, w\big) = 0$ für alle $w \in T_aA$, und $\Omega'\big(Z'(a)\,, w'\big) = 0$ für alle $w' \in T_aA'$. Da Ω' einfach die Einschränkung von Ω ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega\big(Z(a) - Z'(a)\,, w'\big) = \Omega\big(F_a^\sharp\,, w'\big) \\ &= g\big(\eta(F_a^\sharp)\,, \mu(w')\big) - g\big(\eta(w)\,, \mu(F_a^\sharp)\big) \\ &= g\big(F_a^\sharp\,, \mu(w')\big) = \big\langle F_a\,, \mu(w')\big\rangle \end{aligned}$$

für alle $w' \in T_aA'$. Da $\mu\colon T_aA' \to K'_a$ surjektiv ist, gilt in der Tat $\langle F_a, v\rangle = 0$ für alle $v \in K'_a$. Umgekehrt ist Z' durch das d'Alembertsche Prinzip bzw. das dazu äquivalente

$$g\bigl(Z(a) - Z'(a)\,, K'_a\bigr) = 0$$

eindeutig bestimmt. Ist nämlich $Z''(a) \in T_aA'$ mit $\mathrm{D}\pi\bigl(Z''(a)\bigr) = a$ und $g\bigl(Z(a) - Z''(a)\,, K'_a\bigr) = 0$, so folgt $Z'(a) - Z''(a) \in K'_a$ und $g\bigl(Z''(a) - Z'(a)\,, K'_a\bigr) = 0$ und daraus $Z'(a) = Z''(a)$, denn die Einschränkung von g auf K'_a ist nicht ausgeartet.

6.3 Produkte

Sei (M, θ) eine Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur, und seien $\Omega_1, \ldots,$ Ω_s die Wirkungsformen mechanischer Systeme auf (M, θ) mit Galilei-Metriken $g_1, \ldots, g_s$. Sei $M^{(s)}$ die Menge aller s-Tupel $(p_s, \ldots,$ $p_s) \in M \times \ldots \times M = M^s$ mit der Eigenschaft, dass alle p_i im selben instantanen Raum von M liegen; d. h. $M^{(s)}$ ist die Vereinigung aller s-fachen Potenzen (im mengentheoretischen Sinn) von instantanen Räumen von M. Die Menge $M^{(s)}$ besitzt eine natürliche Mannigfaltigkeitenstruktur: Betrachte die s 1-Formen $\theta_i \coloneqq \mathrm{pr}_i^*(\theta)$ auf M^s (wobei $\mathrm{pr}_i\colon M^s \to M$ die Projektion auf den i-ten Faktor ist). Die $s-1$ Pfaffschen Gleichungen

$$\theta_1 - \theta_2 = 0, \quad \ldots, \quad \theta_{s-1} - \theta_s = 0$$

definieren ein integrables Unterbündel von TM^s, und die Diagonale $D \subset M^s$ ist eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit. Man kann sich überlegen, dass $M^{(s)}$ gerade die maximale D enthaltende Integralmannigfaltigkeit ist. Die Dimension von $M^{(s)}$ ist $s(n+1) - (s-1) = ns + 1$.

Die Einschränkung $\theta(s) := \theta_1 | M^{(s)}$ ist eine Zeitstruktur auf $M^{(s)}$, deren instantane Räume gerade die s-ten Potenzen der instantanen Räume von M sind. Sei π_i die Einschränkung von pr_i auf $M^{(s)}$. Dann gilt $\pi_i^*(\theta) = \theta^{(s)}$ für alle $i = 1, \ldots, s$, und daher induziert π_i eine Abbildung $\mathrm{D}\pi_i \colon A^{(s)} \to A$, wobei $A^{(s)}$ den Zustandsraum von $\big(M^{(s)}, \theta^{(s)}\big)$ bezeichnet.

Satz 10. $\Omega := (\mathrm{D}\pi_1)^*\Omega_1 + \ldots + (\mathrm{D}\pi_s)^*\Omega_s$ *ist eine Wirkungsform mit zugehöriger Galilei-Metrik* $g = \pi_1^* g_1 + \ldots + \pi_s^* g_s$.

Der Beweis sei dem Leser überlassen. Wir nennen das durch Ω definierte mechanische System das **Produkt** der Systeme (M, θ, Ω_i). Beispiel: Der n-dimensionale harmonische Oszillator entsteht aus dem 1-dimensionalen Fall durch diese Konstruktion.

* Die Produktbildung entspricht der physikalischen *(. . .)*

Vorstellung eines Mehrteilchensystems **ohne Wechselwirkung**. Zur Beschreibung von Wechselwirkungen hat man zu Ω eine Kraft Φ zu addieren. Als Beispiel betrachten wir das Zweikörperproblem: $M = \mathbb{R}^4$ mit $\theta = \mathrm{d}x^0$, $\Omega_\lambda = m_\lambda \sum \mathrm{d}u^i \wedge (\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t)$ $(\lambda = 1, 2)$. Dann ist $M^{(2)} = \mathbb{R}^7$ mit Koordinaten (t, x_1^i, x_2^i) $(i = 1, 2, 3)$, und

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}\pi_1)^*\Omega_1 + (\mathrm{D}\pi_2)^*\Omega_2 = m_1 \sum \mathrm{d}u_1^i \wedge \big(\mathrm{d}x_1^i - u_1^i\,\mathrm{d}t\big) \\ + m_2 \sum \mathrm{d}u_2^i \wedge \big(\mathrm{d}x_2^i - u_2^i\,\mathrm{d}t\big)\end{aligned}$$

Die Wechselwirkung wird durch Addition einer 2-Form $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}t$ (geschwindigkeitsunabhängige Kraft) beschrieben, wobei f nur von dem Abstand $\|x_1 - x_2\|$ abhängt.

Man kann versuchen, allgemeiner ein Produkt zweier mechanischer Systeme mit verschiedenen (M_1, θ_1), (M_2, θ_2) zu definieren. Dabei tritt jedoch ein "Synchronisationsproblem" auf: es gibt keine natürliche Wahl einer maximalen Integralmannigfaltigkeit von $\mathrm{pr}_1^*\,\theta_1 - \mathrm{pr}_2^*\,\theta_2$ in $M_1 \times M_2$ wie im Fall $M_1 = M_2$, wo man diejenige wählt, die die Diagonale enthält. *

7 Geschlossene Systeme

7.1 Vorbemerkung

Mechanische Systeme mit geschlossener Wirkungsform ($d\Omega = 0$) besitzen eine Reihe von Eigenschaften, die sie als besonders wichtig erscheinen lassen: die Phasenräume und der Raum der Bewegungen (siehe unten) sind symplektische Mannigfaltigkeiten; jeder infinitesimale Automorphismus liefert in natürlicher Weise einen Erhaltungssatz; sie lassen sich zumindest lokal durch eine Lagrange-Funktion beschreiben; für sie gilt der Hamiltonsche Formalismus der klassischen Mechanik, insbesondere das Hamiltonsche Prinzip. Die folgende Charakterisierung geschlossener Systeme (siehe 8.5) gibt vielleicht eine physikalische Interpretation der mathematischen Bedingung $d\Omega = 0$: Ein System ist genau dann geschlossen, wenn es um jeden Punkt ein Bezugssystem B gibt, sodass die in B auftretende Kraft Φ_B verschwindet, also $\Omega = \Omega_B$ gilt. (In Dombrowski-Horneffer [3] heißen solche Bezugssysteme "Inertialsysteme"). Souriau [7] nennt die Forderung $d\Omega = 0$ das "Maxwellsche Prinzip".

7.2 Der Raum der Bewegungen

Die Bewegungsgleichung Z eines beliebigen mechanischen Systems ist ein nirgends verschwindendes Vektorfeld und definiert daher eine 1-dimensionale Blätterung von A. Der Quotient von A nach dieser Blätterung, falls er existiert, heißt nach Souriau der **Raum der Bewegungen** des mechanischen Systems, und werde mit $\underline{A}$ bezeichnet. (Eine hinreichende Bedingung für die Existenz ist die Exaktheit von θ; denn jeder instantane Phasenraum ist transversal zu den Blättern, und falls $\theta = \mathrm{d}t$ global exakt ist, dann schneidet jede Integralkurve von Z, jeden instantanen Phasenraum in höchstens einem Punkt. Durch Übergang zur universellen Überlagerung von M kann man die Exaktheit von θ erzwingen). Die Einschränkung der kanonischen Abbildung $\kappa\colon A \to \underline{A}$ auf einen instantanen Phasenraum ist ein lokaler Diffeomorphismus. Man kann sich also A als "aus den instantanen Phasenräumen zusammengeheftet" vorstellen - im Allgemeinen auf sehr komplizierte Weise; denn $\underline{A}$ braucht nicht Hausdorffsch zu sein (für den Fall des Keplerproblems etwa siehe "Sur la variété de Kepler" von Souriau, in Symposia Mathematica, Vol. 14 (1974)). Falls nun Ω geschlossen ist, so ist die Einschränkung von Ω *(. . .)*

auf jeden instantanen Phasenraum eine symplektische 2-Form (d. h. geschlossen und nirgends ausgeartet), und es gibt genau eine symplektische 2-Form $\underline{\Omega}$ auf $\underline{A}$ mit $\kappa^*(\underline{\Omega}) = \Omega$. Dies folgt aus der Invarianz von Ω unter dem von Z erzeugten Fluss, d. h. der Gleichung $\mathcal{L}_Z\,\Omega = 0$ ($\mathcal{L}_Z$ bedeutet die Lie-Ableitung bezüglich Z). In der Tat ist

$$\mathcal{L}_Z\,\Omega = \mathrm{d}(Z \lrcorner\, \Omega) + Z \lrcorner\, \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{7.1}$$

Der Raum der Bewegungen eines geschlossenen mechanischen Systems ist also in natürlicher Weise eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Aus (7.1) folgt wegen $\mathcal{L}_Z\,\theta = \mathrm{d}\big(\langle\theta\,, Z\rangle\big) + Z \lrcorner\, \mathrm{d}\theta = 0$, dass auch

$$\mathcal{L}_Z\left(\Omega^n \wedge \theta\right) = 0.$$

Der von Z erzeugte Fluss lässt also das "Phasenvolumen" $\Omega^n \wedge \theta$ invariant.

7.3 Erhaltungssätze und konservative Systeme

Satz 11. *Sei (M, θ, g, Z) geschlossen und X ein infinitesimaler Automorphismus. Dann ist die 1-Form $\hat{X} \lrcorner\, \Omega$ auf A geschlossen. Falls sie exakt ist:*

$$\hat{X} \lrcorner\, \Omega = \mathrm{d}f,$$

so ist die Funktion $f = f_X$ eine Erhaltungsgröße; d. h. f ist längs der Integralkurven von Z konstant.

(Die Exaktheit lässt sich durch Übergang zur universellen Überlagerung erzwingen).

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$0 = \mathcal{L}_{\hat{X}}\,\Omega = \mathrm{d}\big(\hat{X}\lrcorner\,\Omega\big) + \hat{X}\lrcorner\,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\big(\hat{X}\lrcorner\,\Omega\big).$$

Falls $\mathrm{d}f = \hat{X}\lrcorner\,\Omega$, so folgt

$$Z.f = \langle \mathrm{d}f\,,Z\rangle = \big\langle \hat{X}\lrcorner\,\Omega\,,Z\big\rangle = -\big\langle Z\lrcorner\,\Omega\,,\hat{X}\big\rangle = 0,$$

was zu zeigen war. □

Wir definieren: Ein mechanisches System heißt **konservativ**, wenn es geschlossen ist, und wenn es einen infinitesimalen Automorphismus B mit $\langle\theta\,,B\rangle = 1$ gibt; anders ausgedrückt: wenn es ein Bezugssystem B gibt, das ein infinitesimaler Automorphismus ist. Die zu B gehörige Erhaltungsgröße E_B (wir nehmen an, dass $\hat{B}\lrcorner\,\Omega$ exakt ist) heißt die **Gesamtenergie** bezüglich B. Es ist also

$$\mathrm{d}E_B = \hat{B}\lrcorner\,\Omega,$$

und E_B ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Man beachte weiter: ein B dieser Art ist keineswegs eindeutig; denn falls X ein infinitesimaler raumartiger Automorphismus ist (d. h. $\langle\theta\,,X\rangle = 0$), so hat $B' = B + X$ dieselben Eigenschaften wie B.

Wir zeigen, dass sich die Gesamtenergie als Summe von kinetischer und potentieller Energie darstellt. Sei T_B die kinetische Energie bezüglich B, und $\Omega = \Omega_B + \Phi_B$ wie in 4.5, mit $\Omega_B = \mathrm{d}\omega_B$ und $\omega_B \coloneqq \partial T_B + T_B\,\mathrm{d}t$. Aus $\mathcal{L}_B\, g = 0$ folgt leicht, dass $\mathcal{L}_{\hat{B}}\, T_B = 0$ und daraus $\mathcal{L}_{\hat{B}}\, \omega_B = 0$. Daher gilt

$$\hat{B} \lrcorner\, \Omega_B = \hat{B} \lrcorner\, \mathrm{d}\omega_B = \mathcal{L}_{\hat{B}}\, \omega_B - \mathrm{d}\big(\hat{B} \lrcorner\, \omega_B\big) = \mathrm{d}T_B,$$

denn man rechnet leicht nach, dass $\hat{B} \lrcorner\, \mathrm{d}\omega_B = \big\langle \omega_B\,, \hat{B} \big\rangle = -T_B$. Weiter ist Φ_B eine basische geschlossene 2-Form, und $\hat{B} \lrcorner\, \Phi_B = B \lrcorner\, \Phi_B = \mathrm{d}E_B - \mathrm{d}T_B$ eine exakte basische 1-Form, also $B \lrcorner\, \Phi_B = \mathrm{d}V_B$ mit $V_B \colon M \to \mathbb{R}$, genannt die **potentielle Energie** bezüglich B. Damit haben wir die gewünschte Zerlegung

$$E_B = T_B + V_B.$$

(Vorsicht: $T_B - V_B$ ist im allgemeinen keine Lagrange-Funktion für das System. Das ist nur der Fall, wenn die Kraft Φ_B geschwindigkeitsunabhängig ist).

Mit derselben Schlussweise wie im Satz bekommt man Erhaltungsgrößen auch bei nicht geschlossenem Ω, sobald man einen infinitesimalen Automorphismus X hat, für den $\hat{X} \lrcorner\, \Omega$ geschlossen (bzw. exakt) ist. Im Fall des harmonischen Oszillators mit Reibung ($\rho \neq 0$) zeigt sich jedoch, dass es keine solchen $X \neq 0$ gibt. Andrerseits gibt es nach allgemeinen Sätzen *(. . .)*

über Differentialgleichungen **lokal** auf A stets $2n$ unabhängige Erhaltungsgrößen für Z (d. h. Funktionen $f_1, \dots, f_{2n}$ mit $Z.f_i = 0$ und $\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_{2n}$ überall linear unabhängig). Im Gegensatz zu den aus infinitesimalen Automorphismen konstruierten haben diese Erhaltungsgrößen keine besondere physikalische Bedeutung. *

7.4 Exakte Systeme

Ein mechanisches System heißt **exakt**, wenn Ω die äußere Ableitung einer 1-Form ist. Ein exaktes System ist geschlossen, und nach dem Poincaréschen Lemma ist ein geschlossenes System lokal exakt. Global ist dagegen ein geschlossenes System im Allgemeinen nicht exakt, und die Exaktheit lässt sich auch nicht (wie bei 1-Formen) durch Übergang zur universellen Überlagerung erzwingen. Ein Beispiel ist etwa $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit der natürlichen Karte (t, x^1, x^2, x^3), $\theta = \mathrm{d}t$, und

$$\Omega = m \, \mathrm{d}u^i \wedge \big(\mathrm{d}x^i - u^i \, \mathrm{d}t\big) + \frac{1}{r^3}\big(x^1 \, \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + x^2 \, \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + x^3 \, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2\big),$$

wo $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ (Magnetfeld mit Singularität im Nullpunkt).

Satz 12. *Sei Ω exakt. Dann gibt es eine semibasische 1-Form ω auf A mit $\mathrm{d}\omega = \Omega$.*

Beweis (nur für Mathematiker). Nach Voraussetzung gibt es eine 1-Form ω' auf A mit $\mathrm{d}\omega' = \Omega$. Sei $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ eine offene Überdeckung von M, sodass A über jedem U_α trivial ist. Da Ω auf den Fasern verschwindet, ist $\mathrm{d}\omega'|A_p = \mathrm{d}(\omega'|A_p) = 0$, also $\omega'|A_p$ geschlossen, und wegen $A_p \approx \mathbb{R}^n$ exakt. Da $\pi^{-1}(U_\alpha) \approx U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, folgt aus dem Poincaré-Lemma mit Parametern, dass es Funktionen f_α auf $\pi^{-1}(U_\alpha)$ gibt mit $\omega'|A_p = \mathrm{d}f_\alpha|A_p$ für alle $p \in U_\alpha$; d. h. $\omega_\alpha := \omega'|\pi^{-1}(U_\alpha) - \mathrm{d}f_\alpha$ ist semibasisch. Ferner gilt $\mathrm{d}\omega_\alpha = \Omega|\pi^{-1}(U_\alpha)$ wegen $\mathrm{d}\mathrm{d}f_\alpha = 0$. Also ist $\omega_\alpha - \omega_\beta = \mathrm{d}f_\beta - \mathrm{d}f_\alpha = \mathrm{d}(f_\beta - f_\alpha)$ eine geschlossene semibasische, mithin basische 1-Form auf $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, und folglich $f_\beta - f_\alpha$ konstant auf A_p für alle $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, denn A_p ist zusammenhängend. Daher ist $f_\beta - f_\alpha = h_{\alpha\beta} \circ \pi$ mit Funktionen $h_{\alpha\beta}$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$, und die $h_{\alpha\beta}$ bilden einen 1-Čech-Kozykel zur Überdeckung $\mathcal{U}$ mit Werten in der Garbe der differenzierbaren Funktionen. Dieser ist ein Korand; d. h. es gibt Funktionen h_α auf U_α mit $h_{\alpha\beta} = h_\alpha - h_\beta$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$. Es folgt $f_\beta - f_\alpha = h_\alpha \circ \pi - h_\beta \circ \pi$, und daher gibt es eine wohldefinierte Funktion f auf A mit $f|\pi^{-1}(U_\alpha) = f_\alpha + h_\alpha \circ \pi$. Nun setze man $\omega = \omega' - \mathrm{d}f$. $\square$

Eine semibasische 1-Form ω mit $\mathrm{d}\omega = \Omega$ heißt eine **Cartan-Form** zu Ω. Sie ist natürlich nicht *(. . .)*

eindeutig bestimmt. Die Differenz zweier Cartan-Formen zu Ω ist semibasisch und geschlossen, also basisch und geschlossen, und umgekehrt ist $\omega + \alpha$ eine Cartan-Form zu Ω, falls α basisch und geschlossen ist. Ist jede geschlossene 1-Form auf M exakt (etwa M einfach zusammenhängend), so ist also eine Cartan-Form bis auf das vollständige Differential einer Funktion auf M ("Eichfunktion") bestimmt.

7.5 Systeme mit integrierendem Faktor

Wir sagen, ein mechanisches System besitze einen integrierenden Faktor, wenn es eine positive Funktion f auf A gibt, sodass $\mathrm{d}(f\Omega) = 0$. Das ist mit $\mathrm{d}\Omega = -\frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \Omega$ äquivalent.

Lemma 4. *f ist eine basische Funktion.*

Beweis. In einer Karte ist $\frac{\partial f}{\partial u^i} = 0$ zu zeigen. Durch direkte Rechnung sieht man, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u^j} \lrcorner \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \lrcorner \, \mathrm{d}\Omega \right) = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \lrcorner \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \lrcorner \, (\mathrm{d}f \wedge \Omega) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial u^i} \, g_{jk} \left(\mathrm{d}x^k - u^k \, \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Nach dem Lemma ist fg eine zu g konforme Galilei-Metrik auf M, und $f\Omega$ ist eine *(...)*

Wirkungsform mit derselben Bewegungsgleichung wie Ω. In der Tat verschwindet $f\Omega$ auf $\operatorname{Ker}\mu$, induziert die Galilei-Metrik fg, und $\partial(f\Omega) = \partial f \wedge \Omega + f\partial\Omega = 0$ wegen $\partial\Omega = 0$ und $\partial f = \frac{\partial f}{\partial u^i}\,(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t) = 0$.

Beispiel: der harmonische Oszillator, vgl. 3.3.

8 Lagrangesche und Hamiltonsche Mechanik

8.1 Die Lagrange-Funktion

Sei (M, θ, g, Z) ein exaktes System, ω eine Cartan-Form für Ω. Die im Folgenden eingeführten Begriffe hängen wesentlich von der Wahl von ω und nicht nur vom mechanischen System ab. Die **Lagrange-Funktion** ist

$$L \coloneqq \langle \omega \,, Z \rangle,$$

eine Funktion auf A.

Satz 13. *L bestimmt ω durch*

$$\omega = \partial L + L \,\mathrm{d}t. \tag{8.1}$$

In einer Karte gelten folgende Formeln:

$$\omega = p_i \,\mathrm{d}x^i - H \,\mathrm{d}t, \tag{8.2}$$

wobei

$$p_i \coloneqq \frac{\partial L}{\partial u^i}, \tag{8.3}$$

$$H \coloneqq p_i u^i - L, \tag{8.4}$$

$$\Omega = \big(\mathrm{d}p_i - f_i \,\mathrm{d}t\big) \wedge \big(\mathrm{d}x^i - u^i \,\mathrm{d}t\big) \tag{8.5}$$

mit

$$f_i \coloneqq \frac{\partial L}{\partial x^i}, \tag{8.6}$$

$$\mathrm{d}H = -f_i \,\mathrm{d}x^i + u^i \,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial t} \,\mathrm{d}t, \tag{8.7}$$

$$g_{ik} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^k}. \tag{8.8}$$

Beweis. Als semibasische 1-Form ist ω jedenfalls von der Form (8.2) mit gewissen Funktionen p_i und H auf $\pi^{-1}(U)$. Nach Definition von L ist

$$L = \langle \omega\,, Z\rangle = \left\langle p_i\,\mathrm{d}x^i - H\,\mathrm{d}t\,, \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + f^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right\rangle = p_i u^i - H.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
0 &= Z \lrcorner\, \mathrm{d}\omega = Z \lrcorner \big(\mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t\big)\\
&= (Z.p_i)\,\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}p_i.u^i - (Z.H)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}H \quad (\text{wegen } \langle \mathrm{d}t\,, Z\rangle = 1)\\
&= (Z.p_i)\,\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}p_i.u^i - (Z.H)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}p_i.u^i + p_i\,\mathrm{d}u^i - \mathrm{d}L \ (\text{wegen } (8.4))\\
&= \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial u^i}\right)\mathrm{d}u^i + \left(Z.p_i - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i - \left(Z.H + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen (8.3), (8.4), (8.7) und (8.1). Weiter ist mit (8.7)

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}t\\
&= \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i - \big(f_i\,\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}p_i\big) \wedge \mathrm{d}t\\
&= (\mathrm{d}p_i - f_i\,\mathrm{d}t) \wedge \big(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\big)\\
&= \frac{\partial p_i}{\partial u^k}\,\mathrm{d}u^k \wedge \big(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\big) + \ldots = g_{ik}\,\mathrm{d}u^k \wedge \big(\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t\big) + \ldots,
\end{aligned}$$

wobei die Punkte semibasische Formen bezeichnen. Es folgt (8.5) und zusammen mit (8.3) auch (8.8). □

Korollar 1. *Für jedes $p \in M$ ist die Einschränkung von L auf den affinen Raum A_p eine inhomogene quadratische Funktion, deren rein quadratischer Anteil durch $\frac{1}{2}g_p$ gegeben ist.*

In der Tat folgt aus (8.8)

$$\frac{\partial^3 L}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} = 0,$$

also hat *(...)*

L auf $\pi^{-1}(U)$ die Form

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} u^i u^k + a_i u^i + a_0 \tag{8.9}$$

mit gewissen Funktionen a_0, a_i auf U.

* Üblicherweise heißen die p_i die **verallgemeinerten Impulse**, die f_i die **verallgemeinerten Kräfte**, und H die **Hamilton-Funktion**. Beachte, dass diese Größen erstens von der Wahl der Karte und zweitens von der Wahl von ω abhängen, und nur auf $\pi^{-1}(U)$ definiert sind. Bei einem Kartenwechsel gelten die Formeln

$$p_i = \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}, \quad H = \tilde{H} - \tilde{p}_k \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial t}.$$

Insbesondere ist H keine auf ganz M wohldefinierbare Funktion! *

Auf Grund des Satzes ist klar, dass ω und damit Ω durch L eindeutig bestimmt ist. Damit stellen sich folgende Fragen: (a) Inwieweit ist L durch Ω bestimmt? (b) Welche Funktionen L auf A treten als Lagrange-Funktionen von exakten mechanischen Systemen auf? Die Antwort auf (a) ist leicht: Zwei Cartan-Formen ω_1, ω_2 zu Ω unterscheiden sich lokal um das Differential einer Funktion, etwa $\omega_2 - \omega_1 = \mathrm{d}f$. Daher ist lokal

$$L_2 - L_1 = \langle \mathrm{d}f\,, Z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, u^i + \frac{\partial f}{\partial t};$$

also unterscheiden sich L_2 und L_1 lokal um eine sogenannte "vollständige Zeitableitung“. Die Antwort auf (b) lautet: Jede Funktion L auf A mit der im Korollar angegebenen Eigenschaft ist die Lagrange-Funktion eines exakten Systems. Zum Beweis verwende man die Formeln des Satzes zur lokalen Definition von ω und Ω, und rechne nach, dass die Definition von der Kartenwahl nicht abhängt.

8.2 Kanonische Koordinaten

Aus (8.3) und (8.9) folgt

$$p_i = g_{ik}u^k + a_i \tag{8.10}$$

und daher

$$u^i = g^{ik}(p_k - a_k). \tag{8.11}$$

Dies zeigt, dass auch die $2n+1$ Funktionen $(t, x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ ein Koordinatensystem auf $\pi^{-1}(U)$ bilden; sie heißen **kanonische Koordinaten**. Wir bezeichnen die zu den 1-Formen $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}p^i$ dualen Vektorfelder mit $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$, $\frac{\partial}{\partial p_i}$ (Vorsicht! $\frac{\partial}{\partial \bar{t}} \neq \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \neq \frac{\partial}{\partial x^i}$).

Satz 14. *In kanonischen Koordinaten gilt*

$$u^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad f_i = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}^i}, \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \bar{t}}, \tag{8.12}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \frac{\partial H}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{8.13}$$

$$\Omega^n \wedge \theta = n!\, \mathrm{d}p_1 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}p_n \wedge \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}t. \tag{8.14}$$

Beweis. (8.12) folgt sofort aus (8.7). Nach (8.5) ist

$$0 = Z \lrcorner \Omega = \big\langle \mathrm{d}p_i - f_i \,\mathrm{d}t \,, Z \big\rangle \big(\mathrm{d}x^i - u^i \,\mathrm{d}t\big) \\ - \big\langle \mathrm{d}x^i - u^i \,\mathrm{d}t \,, Z \big\rangle \big(\mathrm{d}p_i - f_i \,\mathrm{d}t\big),$$

und hieraus $\big\langle \mathrm{d}p_i - f_i \,\mathrm{d}t \,, Z \big\rangle = \big\langle \mathrm{d}x^i - u^i \,\mathrm{d}t \,, Z \big\rangle = 0$, denn die 1-Formen $\mathrm{d}p_i$, $\mathrm{d}x^i$, $\mathrm{d}t$ sind linear unabhängig. Wegen $\langle \mathrm{d}t \,, Z \rangle = 1$ folgt $\langle \mathrm{d}p_i \,, Z \rangle = f_i$ und $\langle \mathrm{d}x^i \,, Z \rangle = u^i$, also (8.13). Schließlich bekommt man (8.14) aus (8.5). Schreibt man (8.13) in "Gleichungsform", so bekommt man die klassischen kanonischen oder Hamiltonschen Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}^i}.$$

□

8.3 Das Hamiltonsche Prinzip

Für eine nach der Zeit parametrisierte Kurve $\gamma \colon [a, b] \to M$ definieren wir die **Wirkung**

$$W[\gamma] := \int_a^b L(\dot{\gamma}(\tau)) \,\mathrm{d}\tau \,.$$

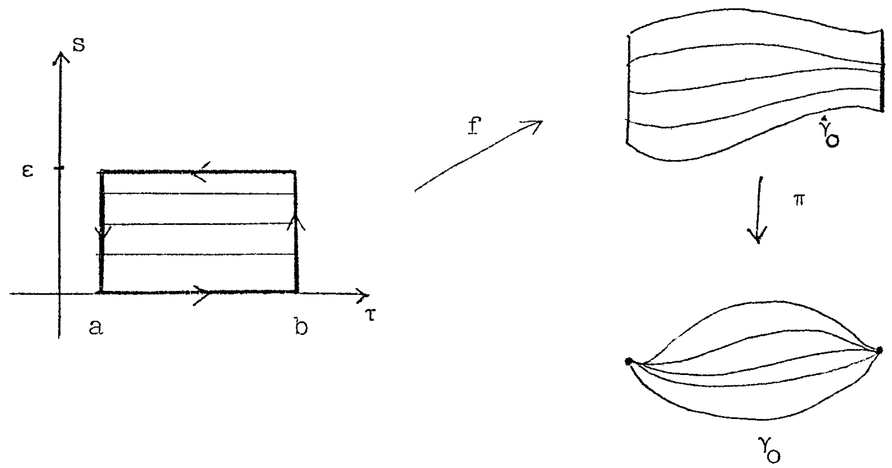
Aus der lokalen Darstellung

$$\omega = p_i \left(\mathrm{d}x^i - u^i \,\mathrm{d}t\right) + L \,\mathrm{d}t$$

und $\dot{\gamma}^* \left(\mathrm{d}x^i - u^i \,\mathrm{d}t\right) = 0$ (wegen $u^i \circ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}^i$) folgt, dass auch

$$W[\gamma] = \int_a^b \dot{\gamma}^*(\omega) \,.$$

Das Hamiltonsche Prinzip besagt: Die Bewegungen des exakten mechanischen Systems (M, θ, g, Z) (also die Integralkurven von Z) sind die Extremalen des durch W definierten Variationsproblems. In unserer Auffassung ist dieses Prinzip ein Satz, den wir nun beweisen. Betrachte eine Variation von γ mit festen Endpunkten, also eine Familie (γ_s) von nach der Zeit parametrisierten Kurven auf $[a, b]$ mit $\gamma_0 = \gamma$ und $\gamma_s(a) = \gamma_0(a)$, $\gamma_s(b) = \gamma_0(b)$, für alle s in einer Umgebung von Null. Betrachte weiter die Abbildung $f\colon (\tau, s) \mapsto \dot\gamma_s(\tau)$ des Rechtecks R: $a \le \tau \le b$, $0 \le s \le \varepsilon$ der (τ, s)-Ebene nach A, und wende auf $f^*\omega$ den Stokesschen Satz an:



Das Randintegral ist

$$\int_{\partial R} f^*\omega = \int_a^b \langle \omega\, , \ddot\gamma_0 \rangle \,\mathrm{d}\tau + \int_0^\varepsilon \left\langle \omega\, , \frac{\partial \gamma_s(b)}{\partial s} \right\rangle \mathrm{d}s$$
$$- \int_a^b \langle \omega\, , \ddot\gamma_\varepsilon \rangle \,\mathrm{d}\tau - \int_0^\varepsilon \left\langle \omega\, , \frac{\partial \gamma_s(a)}{\partial s} \right\rangle \mathrm{d}s\,.$$

Aus $\pi\big(\dot\gamma_s(a)\big) = \gamma_s(a) = \gamma_0(a) = \pi\big(\dot\gamma_0(a)\big)$ folgt durch Differentiation nach s $\mathrm{D}\pi\big(\frac{\partial\dot\gamma_s}{\partial s}(a)\big) = 0$. Also ist $\frac{\partial\dot\gamma_s(a)}{\partial s}$ und ebenso $\frac{\partial\dot\gamma_s(b)}{\partial s}$ vertikal. Da ω semibasisch ist, verschwinden die vertikalen Anteile des Randintegrals. Es bleibt (wegen $\dot\gamma_s^*\omega = \langle\omega\,,\ddot\gamma_s\rangle\,\mathrm{d}\tau$)

$$
\begin{aligned}
W[\gamma_\varepsilon] - W[\gamma_0] &= \int_a^b \dot\gamma_\varepsilon^*\omega - \int_a^b \dot\gamma_0^*\omega \\
&= -\int_{\partial R} f^*\omega = -\int_R \mathrm{d}f^*\omega = -\int_R f^*\mathrm{d}\omega \\
&= -\int_a^b \mathrm{d}\tau \int_0^\varepsilon \mathrm{d}s\,\Omega\left(\ddot\gamma_s\,, \frac{\partial\dot\gamma_s}{\partial s}\right).
\end{aligned}
$$

Entwickeln wir das Doppelintegral nach ε, so folgt

$$
W[\gamma_\varepsilon] - W[\gamma_0] = -\varepsilon \int_a^b \Omega\left(\ddot\gamma_0\,, \left.\frac{\partial\dot\gamma_s}{\partial s}\right|_{s=0}\right)\mathrm{d}\tau + o(\varepsilon). \qquad (8.15)
$$

Ist nur γ_0 eine Bewegung des Systems, also $\ddot\gamma_0 = Z\circ\dot\gamma_0$, so folgt wegen $Z\lrcorner\,\Omega = 0$ tatsächlich $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} W[\gamma_\varepsilon] = 0$. Also ist γ_0 Extremale.

Nach bekannten Sätzen der Variationsrechnung minimieren die Extremalen im Kleinen (aber im Allgemeinen nicht im Großen) das Funktional W, denn wegen (8.8) erfüllt L die sogenannte starke Legendresche Bedingung.

* Man kann W als eine Funktion auf einer unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit C von Kurven mit den Endpunkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ betrachten, die allerdings noch zu präzisieren wäre. Eine Kurve in C ist eine Variation (γ_s), ein "Tangentialvektor" an C an der Stelle γ ist ein Vektorfeld $Y = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}\big|_{s=0}$ längs γ, das in den Endpunkten verschwindet. Dann zeigt (8.15), dass das Differential von W an der Stelle γ in Richtung Y durch

$$\mathrm{d}W(\gamma; Y) = -\int_a^b \Omega\left(\ddot{\gamma}\,, \hat{Y}\right) \mathrm{d}\tau$$

gegeben ist, wobei $\hat{Y} = \frac{\partial \dot{\gamma}_s}{\partial s}\big|_{s=0}$ die natürliche Hochhebung von Y zu einem Vektorfeld längs $\dot{\gamma}$ bedeutet (man überlege sich, dass $\hat{Y}$ tatsächlich nur von Y abhängt). Die rechte Seite dieser Formel hat auch keinen Sinn, wenn Ω nicht exakt oder sogar nicht einmal geschlossen ist, und kann als Definition einer 1-Form auf C angesehen werden. Nennen wir sie provisorisch die Wirkungs-1-Form, so lässt sich eine Art Hamiltonsches Prinzip auch für nicht geschlossene Systeme formulieren: Die Bewegungen eines mechanischen Systems entsprechen denjenigen Punkten von C, in denen die Wirkungs-1-Form verschwindet. *

8.4 Die Legendre-Transformation

Wir betrachten ein exaktes System mit Cartan-Form ω. Sei $p \in M$. Für jedes $a \in A_p$ ist ω_a eine Linearform auf T_aA, die auf K_a verschwindet. Da $T_aA/K_a \cong T_pM$, gibt es genau ein $\Lambda(a) \in T_p^*M$ mit

$$\langle \omega_a \,, v \rangle = \big\langle \Lambda(a) \,, \mathrm{D}\pi(v) \big\rangle, \tag{8.16}$$

für alle $v \in T_aA$. Auf diese Weise bekommt man eine fasertreue Abbildung $\Lambda\colon A \to T^*M$. Sie heißt die **Legendre-Transformation**, und hängt natürlich von der Wahl von ω und nicht nur vom mechanischen System ab.

Auf T^*M hat man die kanonische 1-Form σ, definiert durch

$$\langle \sigma_\alpha \,, w \rangle = \big\langle \alpha \,, \mathrm{D}\rho(w) \big\rangle,$$

wobei $\alpha \in T^*M$, $w \in T_\alpha T^*M$, und $\rho\colon T^*M \to M$ die Projektion ist. Wir behaupten

$$\Lambda^*\sigma = \omega. \tag{8.17}$$

In der Tat ist für $v \in T_aA$

$$\begin{aligned} \big\langle \, (\Lambda^*\sigma)_a \,, v \big\rangle &= \big\langle \sigma_{\Lambda(a)} \,, \mathrm{D}\Lambda(v) \big\rangle = \big\langle \Lambda(a) \,, \mathrm{D}\rho\big(\mathrm{D}\Lambda(v)\big) \big\rangle \\ &= \big\langle \Lambda(a) \,, \mathrm{D}\pi(v) \big\rangle = \big\langle \omega_a \,, v \big\rangle, \end{aligned}$$

wegen $\rho \circ \Lambda = \pi$ (Fasertreue von Λ).

Eine Karte $(U; x^0, \ldots, x^n)$ von M induziert eine Karte $(\rho^{-1}(U);$ $x^0, \ldots, x^n, y_0, \ldots, y_n)$ von *(...)*

T^*M, wobei (wie im Fall von A) statt x^λ eigentlich $x^\lambda \circ \rho$ stehen müsste, und die y_λ durch

$$y_\lambda(\alpha) = \left\langle \alpha \, , \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right\rangle$$

definiert sind, für $a \in \rho^{-1}(U)$. Die 1-Form σ hat die lokale Darstellung

$$\sigma = y_0 \,\mathrm{d}x^0 + y_i \,\mathrm{d}x^i.$$

Aus (8.2) und (8.17) folgt

$$\Lambda^*\sigma = (y_0 \circ \Lambda)\,\mathrm{d}x^0 + (y_i \circ \Lambda)\,\mathrm{d}x^i = p_i \,\mathrm{d}x^i - H \,\mathrm{d}t,$$

also

$$y_i \circ \Lambda = p_i, \quad y_0 \circ \Lambda = -H. \tag{8.18}$$

Als nächstes wollen wir das Bild $\Lambda(A) \subset T^*M$ beschreiben. In jedem A_p gibt es genau einen Punkt a mit der Eigenschaft, dass $\Lambda(a)$ ein Vielfaches von θ_p ist. Wegen (8.2) ist nämlich $\Lambda(a)$ ein Vielfaches von θ_p genau dann, wenn $p_i(a) = 0$, und nach (8.10) haben diese Gleichungen eine eindeutige Lösung. Bezeichnen wir diesen Punkt mit $B_0(p)$, so haben wir damit ein globales Bezugssystem $B_0 \colon M \to A$ definiert, das wegen (8.11) lokal durch

$$B_0 = \frac{\partial}{\partial t} - g^{ik} a_k \,\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{8.19}$$

gegeben ist. Geometrisch ist $B_0(p)$ das Zentrum des Ellipsoids mit der Gleichung $L|A_p = \text{const}$. Die Lagrange-Funktion lässt sich schreiben

$$L = T_{B_0} - V$$

mit der "potentiellen Energie" $V := -L \circ B_0$. Wir definieren die "Superhamiltonfunktion" $\mathcal{H}$ auf T^*M durch

$$\mathcal{H}(\alpha) = \frac{1}{2}\, g^\sharp(\alpha\,,\alpha) + \big\langle \alpha\,, B_0(p)\big\rangle + V(p)$$

für alle $\alpha \in T_p^*M$, $p \in M$ (dabei sei $g^\sharp$ die durch g auf T^*M induzierte positiv semidefinite Fasermetrik, vgl. 1.3). Eine leichte Rechnung zeigt, dass $\mathcal{H}$ lokal durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\, g^{ik} y_i y_k + \big(y_0 - g^{ik} a_k y_i\big) + \left(\frac{1}{2}\, g^{ik} a_i a_k - a_0\right) \\ &= y_0 + \frac{1}{2}\, g^{ik}\,(y_i - a_i)\,(y_k - a_k) - a_0 \end{aligned} \tag{8.20}$$

gegeben ist.

Satz 15. $\Lambda \colon A \to T^*M$ *ist eine abgeschlossene Einbettung. Das Bild von* Λ *ist die Hyperfläche* $N = \mathcal{H}^{-1}(0)$ *in* T^*M.

Beweis. Aus (8.3), (8.8), (8.18) folgt

$$\frac{\partial\,(y_i \circ \Lambda)}{\partial u^k} = g_{ik}\,,$$

also ist Λ eine Immersion, die wegen (8.11) injektiv ist. Weiter ist (einfache Rechnung unter Verwendung von (8.9)–(8.11))

$$\begin{aligned} -H = L - p_i u^i &= -\frac{1}{2}\, g_{ik} u^i u^k + a_0 \\ &= -\frac{1}{2}\, g^{ik}\,(p_i - a_i)\,(p_k - a_k) + a_0. \end{aligned}$$

Wegen (8.18) und (8.20) folgt die Behauptung. $\square$

* Man nennt T^*M auch den **erweiterten Phasenraum**. Mittels des Diffeomorphismus $\Lambda \colon A \to N$ kann man die *(...)*

gesamte Theorie von A auf N übertragen. Dabei entspricht ω der Einschränkung $\sigma|N$, und Ω der Einschränkung $\mathrm{d}\sigma|N$. Da Λ aber nur für exakte Systeme definiert ist und von der Wahl von ω abhängt, scheint dies von zweifelhaftem Wert zu sein. Aus (8.19) entnimmt man, dass die Hyperflächen $N_p = N \cap T_p^*M$ in T_p^*M Paraboloide sind. *

8.5 Die Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir betrachten ein exaktes System mit Cartan-Form ω.

Satz 16. *Sei $U \subset M$ offen und einfach zusammenhängend und $B\colon U \to A$ ein Schnitt. Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

(i) $B^*\Omega = 0$,

(ii) $\Phi_B = 0$,

(iii) es gibt eine Funktion S auf U mit $B^*\omega = \mathrm{d}S$,

(iv) (falls U der Bereich einer Karte $(U; x^0, \dots, x^n)$ ist) es gilt $p_i \circ B = \frac{\partial S}{\partial x^i}$, wobei S eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \bar{H}(t, x^1, \dots, x^n, \frac{\partial S}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x^n}) = 0$$

auf U ist. (Hierbei sei $\bar{H}$ die durch

$$\bar{H}(t, x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) = H$$

definierte Funktion).

Beweis. Es ist $T_B \circ B = 0$, also $B^*(\partial T_B + T_B\,\mathrm{d}t) = 0$, und daher $B^*(\Omega_B) = 0$. Folglich $B^*\Omega = B^*(\Omega_B + \Phi_B) = B^*\Phi_B$, und da Φ_B basisch ist, folgt aus $B^*\Phi_B = 0$ schon $\Phi_B = \pi^* B^*\Phi_B = 0$. Das zeigt die Äquivalenz von (*i*) und (*ii*). Die Äquivalenz von (*i*) und (*iii*) folgt aus $B^*\Omega = B^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}B^*\omega = 0$ und dem Poincaréschen Lemma. Schließlich ist

$$\begin{aligned} B^*\omega = B^*\left(p_i\,\mathrm{d}x^i - H\,\mathrm{d}t\right) &= \big(p_i \circ B\big)\,\mathrm{d}x^i - \big(H \circ B\big)\,\mathrm{d}t \\ = \mathrm{d}S &= \frac{\partial S}{\mathrm{d}x^i}\,\mathrm{d}x^i + \frac{\partial S}{\partial t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

genau dann der Fall, wenn $p_i \circ B = \frac{\partial S}{\partial x^i}$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -H \circ B = -\bar{H}\left(t, x^1, \ldots, x^n, p_1 \circ B, \ldots, p_n \circ B\right) \\ &= -\bar{H}\left(t, x^1, \ldots, x^n, \frac{\partial S}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x^n}\right). \end{aligned}$$

□

In der Variationsrechnung heißt ein B mit den im Satz aufgeführten Eigenschaften ein **Mayer-Feld**. Wegen (*ii*) könnte man ein solches B in der Mechanik ein **kräftefreies Bezugssystem** (Inertialsystem?) nennen. Es ist bekannt, dass es lokal stets Mayer-Felder gibt; es lässt sich sogar jede Extremale lokal in ein Mayer-Feld einbetten. Damit hat man die folgende Charakterisierung geschlossener Systeme:

Ein mechanisches System ist geschlossen genau dann, wenn es um jeden Punkt ein kräftefreies Bezugssystem gibt. (Dass die Bedingung hinreichend für $\mathrm{d}\Omega = 0$ ist, folgt aus $\mathrm{d}\Omega_B = 0$).

A Dimensionsbetrachtungen

Wir haben bisher angenommen, dass die betrachteten Größen, wie etwa θ, Ω, ω, L u.s.w. numerische Werte haben. Das ist eigentlich nicht zulässig; denn es gibt keine natürlichen Einheiten für Zeit, Wirkung, Energie u.s.w. Es erscheint daher sinnvoll anzunehmen, dass die Werte einer physikalischen Größe in einem dieser Größe zugeordneten 1-dimensionalen Vektorraum liegen, der physikalischen Dimension dieser Größe. Die 1-dimensionalen Vektorräume bilden mit dem Tensorprodukt eine abelsche Gruppe (bis auf gewisse logische Schwierigkeiten, die hier nicht interessieren). Die Dimensionsgruppe einer physikalischen Theorie ist die von den Dimensionen der in der Theorie auftretenden Größen erzeugte Untergruppe D. Im Fall der Mechanik ist D frei mit 3 Erzeugenden, die wir (Zeit), (Wirkung) und (Länge) nennen. Bezeichnen wir wie üblich die Dimension mit eckigen Klammern, so gilt

$$[\theta] := (\text{Zeit}), \quad [\Omega] := (\text{Wirkung}).$$

Folglich ist $[Z] = [\frac{\partial}{\partial t} + \ldots] = (\text{Zeit})^{-1}$.

Falls $[\mathrm{d}x^i] = (\text{Länge})$ (was nicht der Fall zu sein braucht!), so ist $[\Omega] = [g_{ik}]\,[\mathrm{d}u^i]\,[\mathrm{d}x^k] = [g_{ik}]\,(\text{Länge})^2\,(\text{Zeit})^{-1}$, also

$$[g_{ik}] = (\text{Wirkung})\,(\text{Länge})^{-2}\,(\text{Zeit}) =: (\text{Masse}).$$

Ist F eine Kraft mit zugehörigen semibasischen 1- und 2-Formen φ und Φ, so ist $[\Phi] = (\text{Wirkung})$,

$$[\varphi] = [Z \lrcorner \Phi] = \frac{(\text{Wirkung})}{(\text{Zeit})} = (\text{Energie}) = [F_i]\,[\mathrm{d}x^i - u^i\,\mathrm{d}t],$$

also $[F_i] = (\text{Energie})\,(\text{Länge})^{-1} =: (\text{Kraft})$. Aus $\omega = p_i\,\mathrm{d}x^i - H\,\mathrm{d}t = \partial L + L\,\mathrm{d}t$ folgt

$$[p_i] = (\text{Wirkung})\,(\text{Länge})^{-1} = (\text{Impuls}),$$
$$[H] = [L] = (\text{Wirkung})\,(\text{Zeit})^{-1} = (\text{Energie}).$$

B Anmerkungen

Der Begriff der Galilei-Mannigfaltigkeit (Kapitel 1) findet sich in der Arbeit [3] von Dombrowski-Horneffer. Die Beschreibung eines mechanischen Systems durch eine 2-Form (Wirkungsform) geht wohl auf Cartan zurück, und wurde von Gallissot, Klein, und Souriau ausgebaut. Die in Kapitel 3 dargestellte Korrespondenz zwischen mechanischen Systemen (g, Z) und Wirkungsformen Ω (Satz 4) scheint in dieser Form neu zu sein. Bei Souriau fällt die Wirkungsform (dort Lagrange-Form genannt) mehr oder weniger vom Himmel, bei Gallissot steht die falsche (nämlich $\Omega = g_{ik}\,(\mathrm{d}u^i - Z^i\,\mathrm{d}t) \wedge \big(\mathrm{d}x^k - u^k\,\mathrm{d}t\big)$), und Klein betrachtet nicht den klassischen Fall einer Mannigfaltigkeit mit Zeitstruktur, sondern den "relativistischen“ Fall (in der Variationsrechnung würde man von Problemen in parametrischer Form sprechen).

Die mechanischen Systeme im Sinne von Dombrowski-Horneffer sind in unserer Terminologie diejenigen, für die $\mathrm{d}\Omega$ basisch ist; sie sind daher ziemlich *(...)*

spezieller Natur. Der in [3] definierte Kraftbegriff scheint mir sehr unglücklich gewählt und zudem unnötig kompliziert; er stimmt nicht mit dem hier benützten überein. Bei der Behandlung von induzierten Systemen und Produkten zeigen sich die Vorzüge der Beschreibung durch eine 2-Form, denn man kann die bekannten Eigenschaften von Differentialformen unter Abbildungen ausnützen. Die Produktkonstruktion in 6.3 lässt sich anscheinend im relativistischen Fall nicht durchführen.

In den Kapiteln 7 und 8 wird der bekannte Formalismus der Lagrangeschen und Hamiltonschen Mechanik entwickelt. Wieder durch die Verwendung der Wirkungsform wird der Satz von E. Noether (7.3) allgemeiner und sehr einfach zu beweisen. Der richtige Rahmen für die Hamiltonsche Mechanik ist meiner Ansicht nach nicht, wie man das häufig findet (siehe etwa [1]) das Kotangentialbündel T^*Q ("Phasenraum") einer Mannigfaltigkeit Q ("Konfigurationsraum"), wobei dann die Zeit nebenher läuft, indem man $\mathbb{R} \times Q$ bzw. $\mathbb{R} \times T^*Q$ betrachtet, sondern vielmehr, wie bei Souriau, der Zustandsraum $A \subset TM$ der zeitnormierten Vektoren der Raumzeit M. Der Grund ist einfach: Eine Zerlegung $M = \mathbb{R}\times Q$ ist physikalisch nicht sinnvoll, denn sie würde bedeuten, dass es einen absoluten Raum, also auch den Begriff einer absoluten Bewegung, gäbe. Ein weiterer Einwand gegen die Verwendung des Kotangentialbündels ist: Zur Übertragung der Theorie von A auf T^*M braucht man die Legendre-Transformation, die von der Wahl einer Lagrange-Funktion abhängt, und damit erstens nicht global zu existieren braucht, und zweitens, wenn sie existiert, nicht eindeutig ist. Die schöne Charakterisierung geschlossener Systeme durch die Existenz kräftefreier Bezugssysteme stammt von Dombrowski-Horneffer. Bei Souriau heißt die Bedingung $\mathrm{d}\Omega = 0$ das Maxwellsche Prinzip und wird nicht näher interpretiert.

Literatur

[1] R. Abraham und J. Marsden, *Foundations of Mechanics.* W.A. Benjamin, 1978.

[2] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux.* Hermann, 1922.

[3] H.D. Dombrowski und K. Horneffer *Die Differentialgeometrie des Galileischen Relativitätsprinzips.* Math. Zeitschr. 86 (1964), 291–311.

[4] F. Gallissot *Les formes extérieures en mécanique.* Ann. Inst. Fourier (1952), 145–297.

[5] J. Klein *Espaces variationnels et mécanique.* Ann. Inst. Fourier (1962), 1–124.

[6] J. Klein *Les systèmes dynamiques abstraits.* Ann. Inst. Fourier (1963), 191–202.

[7] J.-M. Souriau *Structure des systèmes dynamiques.* Dunod, Paris, 1970.